

Resumen

El presente volumen contiene la memoria del Proyecto Final de Carrera “Estudio de los perfiles perforados de chapa conformada en frío mediante el método de las bandas finitas”. Para el desarrollo del estudio se han analizado cinco perfiles tipo similares a los utilizados como columnas o puntales en la fabricación de estanterías para paletas.

El inicio del proyecto aborda el tema de los métodos comúnmente utilizados en el cálculo de perfiles de acero conformado en frío, prestando especial atención al Método de la Resistencia Directa (*DSM* de sus siglas en inglés *Direct Strength Method*) y la necesidad de calcular las cargas críticas elásticas de pandeo para los modos local (P_{cr1}), global (P_{cre}) y distorsional (P_{crd}) que comporta.

A continuación, en el documento se describe detalladamente el método de Elementos Finitos (*FEM* del inglés *Finite Element Method*) y el método de las Bandas Finitas (*FSM* del inglés *Finite Strip Method*) para el cálculo de las cargas elásticas de los modos de pandeo. El hecho de trabajar con el *FSM* se debe a que el software que implementa esta metodología es más sencillo y barato, aunque presenta el inconveniente de que hoy día aún no permite modelar directamente las perforaciones de los puntales.

Seguidamente, en este documento se presenta una alternativa para poder emplear software basado en *FSM*, como es el programa CUFSM [1] conjuntamente con el concepto de espesor reducido en las bandas perforadas del puntal.

Por tanto, en este documento se propone un procedimiento de cálculo para determinar el espesor reducido (t_r) consistente, básicamente, en analizar los puntales con el *FEM* y el *FSM*. La idea es que las cargas críticas de pandeo para los modos local, distorsional y global determinadas con *FEM* sean aproximadas con el *FSM* mediante el espesor reducido necesario.

El objetivo de este proyecto es desarrollar un método para calcular las cargas críticas elásticas de pandeo para los modos local, distorsional y global mediante el *FSM*. Como no es posible realizar estos cálculos de una manera directa, el problema se traslada al hecho de determinar de una forma precisa el espesor reducido necesario en las bandas perforadas de los puntales modelados mediante *FSM*. Posteriormente, con los resultados de espesor reducido y el programa CUFSM se calcularán las correspondientes cargas críticas elásticas de los modos de pandeo.



Por otro lado, se pretende desarrollar, en la medida de lo posible, unos modelos o ecuaciones para calcular los espesores reducidos necesarios en los modelos creados en CUFSM.

Para el desarrollo y determinación de estos modelos, este primer volumen muestra un estudio estadístico de análisis de datos mediante correlación múltiple de los valores de espesor reducido obtenidos a partir de las variables geométricas de los puntales. A través de los modelos, únicamente conociendo las características geométricas del puntal, será posible determinar el espesor reducido que se necesita introducir en las bandas perforadas del perfil modelado mediante el *FSM* y, por consiguiente, permitirá determinar las cargas críticas elásticas de los modos de pandeo necesarios en el *DSM*.

Finalmente, el presente proyecto muestra un capítulo dedicado a las comprobaciones y verificación de los modelos obtenidos con el fin de determinar con total rigurosidad su validez. Para ello, se han escogido diez puntales originales empleados como columnas en la fabricación de estanterías para paletas.

SUMARIO

VOLUMEN I

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	7
1.1 Origen del proyecto	7
1.2 Objetivos del proyecto	8
1.3 Perfiles objeto de estudio	10
1.4 Contenido del proyecto	14
CAPÍTULO 2. INTRODUCCIÓN AL COMPORTAMIENTO DE LOS PERFILES DE CHAPA CONFORMADA EN FRÍO	17
2.1 Antecedentes sobre los modos de pandeo en perfiles de chapa conformada en frío	17
2.1.1 Abolladura Local	17
2.1.2 Pandeo Global	18
2.1.3 Pandeo Distorsional	18
2.2 Análisis de Pandeo elástico	20
2.2.1 Introducción	20
2.2.2 Métodos de cálculo de las fuerzas críticas de pandeo	20
2.2.3 El Método de los Elementos Finitos (FEM)	20
2.2.4 El Método de la Banda Finita (FSM)	21
2.2.5 La Teoría de la Viga Generalizada (GBT)	23
CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE CÁLCULO	27
3.1 Introducción	27
3.2 Método de la Resistencia directa (DSM)	27
3.3 Presentación del procedimiento de cálculo	30



CAPÍTULO 4. CONSIDERACIONES PREVIAS _____ 33

4.1	Concepto de espesor reducido	33
4.2	Conocimientos estadísticos básicos.	34
4.2.1	Introducción	34
4.2.2	Conceptos de Correlación Lineal.....	34
4.2.3	Concepto de Regresión Lineal	37
4.2.4	Error estándar de estimación (S_{yx}).....	37
4.2.5	Regresión Lineal Múltiple (RLM).....	38
4.2.6	Aplicaciones de la Regresión Lineal Múltiple (RLM).....	38
4.2.7	Modelo de Regresión Lineal Múltiple (MRLM)	39
4.2.8	Requisitos y limitaciones del MRLM	40
4.2.9	Estimación del MRLM.....	43
4.2.10	Medidas de bondad del ajuste	45
4.2.11	Definición del Coeficiente de Determinación Corregido (\bar{R}^2)	45
4.2.12	Significación de los parámetros del modelo	48

CAPÍTULO 5. CÁLCULO DE LA CARGA CRÍTICA ELÁSTICA MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (FEM) _____ 51

5.1	Introducción	51
5.2	Modelado de los perfiles.....	52
5.3	Mallado de los perfiles	53
5.4	Condiciones de contorno y cargas aplicadas.....	55
5.5	Análisis Lineal. Método de Pandeo de Valores propios.....	56
5.5.1	Introducción	56
5.5.2	Proceso de cálculo de Pandeo Lineal de Valores propios.....	57
5.5.3	Cálculos previos con Ansys	59

CAPÍTULO 6. CÁLCULO DE LA CARGA CRÍTICA ELÁSTICA MEDIANTE EL MÉTODO DE LA BANDA FINITA (FSM) _____ 65

6.1	Introducción	65
6.2	Modelado de los perfiles.....	66
6.3	Condiciones de contorno y cargas aplicadas.....	67
6.4	Cálculos previos de espesor reducido con CUFSM.....	68
6.5	Conclusiones sobre los resultados obtenidos en los cálculos previos	72

CAPÍTULO 7. FORMULACIÓN PARA EL ESPESOR REDUCIDO	77
7.1 Introducción.....	77
7.2 Determinación de los parámetros geométricos y estudio de correlación lineal (R)..	78
7.3 Estudio de regresión Lineal de los perfiles analizados en función del modo de inestabilidad	83
7.3.1 Introducción al análisis de datos mediante regresión múltiple.....	83
7.3.2 Espesor reducido para el modo de pandeo distorsional.....	85
7.3.3 Espesor reducido para el modo de pandeo local.....	92
7.3.4 Espesor reducido para el modo de pandeo global	97
7.4 Conclusiones sobre los modelos obtenidos	102
CAPÍTULO 8. VALIDACIÓN DE LOS MODELOS OBTENIDOS PARA CADA TIPO DE INESTABILIDAD	103
8.1 Introducción.....	103
8.2 Resultados del análisis	107
8.3 Discusión de los resultados obtenidos.....	109
8.4 Valoración de los resultados mediante el cálculo de la esbeltez	114
de las columnas analizadas	114
8.5 Conclusiones sobre los resultados obtenidos	117
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	119
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	121



VOLUMEN II

ANEXO A. GEOMETRÍA DE LOS PUNTALES ESTUDIADOS Y GEOMETRÍA DE LOS PUNTALES ANALIZADOS EN LA ETAPA DE COMPROBACIÓN Y VERIFICACIÓN DE RESULTADOS.

ANEXO B. MÉTODOS NUMÉRICOS MEDIANTE ANSYS.

ANEXO C. MACROS DE ANSYS. ANÁLISIS LINEAL DE LOS MODOS DE PANDEO.

VOLUMEN III

ANEXO D. MODELOS DE LOS PUNTALES ANALIZADOS IMPLEMENTADOS EN CUFSM.

ANEXO E. CÁLCULOS PREVIOS DEL ESPESOR REDUCIDO PARA LOS MODOS DE PANDEO LOCAL, DISTORSIONAL Y GLOBAL.

ANEXO F. PARÁMETROS GEOMÉTRICOS DE LOS PERFILES ANALIZADOS PARA EL ESTUDIO DE CORRELACIÓN.

ANEXO G. IMPACTO AMBIENTAL.

ANEXO H. PRESUPUESTO

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Origen del proyecto

El diseño de las columnas perforadas de acero conformado en frío para soporte de estanterías se lleva a cabo principalmente en base a ensayos. Estas columnas presentan múltiples perforaciones a lo largo de su longitud que dificultan el desarrollo de una metodología de diseño analítico. A pesar del importante número de investigaciones existentes dedicadas a los efectos de los agujeros en los perfiles conformados en frío, no existe un método definitivo de análisis generalmente aceptado para columnas de bastidores.

Como consecuencia de ello, no hay ningún procedimiento de cálculo que incluya la perforación de las columnas en los códigos principales del diseño de estructuras de soporte ([RMI,EN]) y únicamente está prescrito el diseño basado en ensayos.

Entre las técnicas numéricas de uso general para modelar el comportamiento de los perfiles conformados en frío, que son: el Método de los Elementos Finitos (*MEF*), el Método de las Bandas Finitas (*FSM*) y la Teoría de la Viga Generalizada (*GBT*), el primero parece ser el más adecuado. El efecto de los agujeros puede tratarse en los modelos de elementos finitos aunque este efecto no es tan fácil de introducir en los análisis cuando se aplica el *FSM*, como se verá en el presente documento. Esta es la razón principal por la que los análisis no lineales mediante elementos finitos se han aplicado en las investigaciones científicas de los perfiles con perforaciones.

Sin embargo, hoy en día el coste computacional de análisis de elementos finitos no lineal sigue siendo demasiado elevado desde el punto de vista de diseño práctico. Los procedimientos convencionales para el control de estabilidad de perfiles, basado en las curvas de pandeo son mucho más rápidos y, por consiguiente, tiene sentido adaptarlos a los perfiles con perforaciones.



1.2 Objetivos del proyecto

Este proyecto presenta un estudio sobre el uso del Método de las Bandas Finitas (*FSM*) para el cálculo de las cargas elásticas de pandeo en perfiles perforados de chapa conformada en frío.

En la actualidad, estos cálculos pueden realizarse con precisión por medio del *MEF* ya que permite considerar el efecto de las perforaciones en los análisis. Sin embargo, el uso de software basado en el *FSM* para el diseño de perfiles conformados en frío es mucho más sencillo y barato. No obstante, el problema de emplear software basado en el *FSM* es que presenta el inconveniente de que las perforaciones no pueden ser modeladas directamente.

Para solventar esta dificultad y con el objetivo de considerar el efecto de las perforaciones de los perfiles estudiados, a lo largo de todo el estudio se trabajará aplicando el concepto de espesor reducido en las bandas perforadas de los perfiles analizados.

Finalmente se pretende obtener, en la medida de lo posible, una fórmula para el cálculo del espesor reducido usado en los modelos *FSM*, calibrada con las cargas de pandeo obtenidas en los análisis *FEM*.

Este proyecto, a su vez, puede emplearse como base de ensayo para investigaciones futuras, como por ejemplo, para el desarrollo de un procedimiento de análisis para comprobar la estabilidad de los perfiles con perforaciones de las columnas de soporte para estanterías. La intención es que derive de uno de los procedimientos existentes para los perfiles no perforados que se pueden encontrar en los códigos de diseño actual, como por ejemplo el *DSM* (de la especificación AISI).

Actualmente existen varias investigaciones referentes a este tema que se pueden encontrar en la literatura científica donde el método del ancho eficaz o *DSM* se ha adaptado a los perfiles con perforaciones (Véase, por ejemplo, [46,48 y 49]). Sin embargo, la mayoría de ellos no trata el tema de columnas perforadas para estanterías.

La primera operación que se lleva a cabo en la aplicación del *DSM*, o cualquier otro procedimiento de análisis moderno es el análisis lineal de pandeo, que se puede realizar mediante el *FEM*. Sin embargo, *FSM* o *GBT* son los métodos preferidos por los diseñadores ya que están implementados en un software mucho más barato y fácil de usar.

Como primer paso en el desarrollo del método de análisis de diseño para las columnas perforadas se presenta un procedimiento para el cálculo de cargas de pandeo elástico de perfiles perforados a través del Método de las Bandas Finitas (*FSM*).

Para calcular el efecto de las perforaciones se utiliza el programa CUFSM [6] y el concepto de espesor reducido en la zona perforada para incluir el efecto de las perforaciones. Las diferentes fórmulas que proporcionan el espesor reducido se calibran en los modelos de CUFSM y por medio del análisis de elementos finitos. El concepto de espesor reducido en las zonas perforadas del perfil se ha logrado utilizar en varias investigaciones sobre los perfiles perforados, como [13]. Sin embargo, no existe la aplicación conjunta del espesor reducido con el *FSM* en las columnas de soporte.

En este proyecto se presenta un estudio completo de cinco secciones diferentes. Finalmente se han propuesto diez perfiles comúnmente utilizados en las estanterías para ser analizados con la formulación obtenida.



1.3 Perfiles objeto de estudio

En la construcción de estanterías metálicas para almacenar productos en paletas o contenedores se utilizan perfiles de chapa de acero obtenidos mediante procesos de conformación en frío. Estos perfiles de paredes delgadas y sección abierta y monosimétrica presentan múltiples perforaciones repartidas homogéneamente a lo largo de toda su longitud.

Los perfiles de chapa conformada en frío, a diferencia de los perfiles laminados en caliente, no presentan unas dimensiones normalizadas puesto que cada fabricante tiene su propia gama de perfiles en los que existe gran variedad en la forma y dimensión de la sección de los mismos.



Figura 1.1-Ejemplos de puntales típicos de chapa delgada y sección abierta y monosimétrica.

Fuente: www.mecalux.es [7].

A lo largo de todo este estudio se han analizado rigurosamente cinco perfiles determinados con el objetivo de presentar una base de datos suficientemente amplia para, posteriormente, poder realizar un estudio estadístico de los resultados a partir de la misma.

Las secciones de los perfiles analizados se presentan en la Figura 1.2. Los cuatro primeros son similares a las secciones transversales de los perfiles producidos por uno de los principales fabricantes en Europa. La quinta sección es similar al tipo que presentan las columnas Norteamericanas.

Para más detalle sobre la geometría de la sección de los perfiles el lector puede consultar el Anexo A.

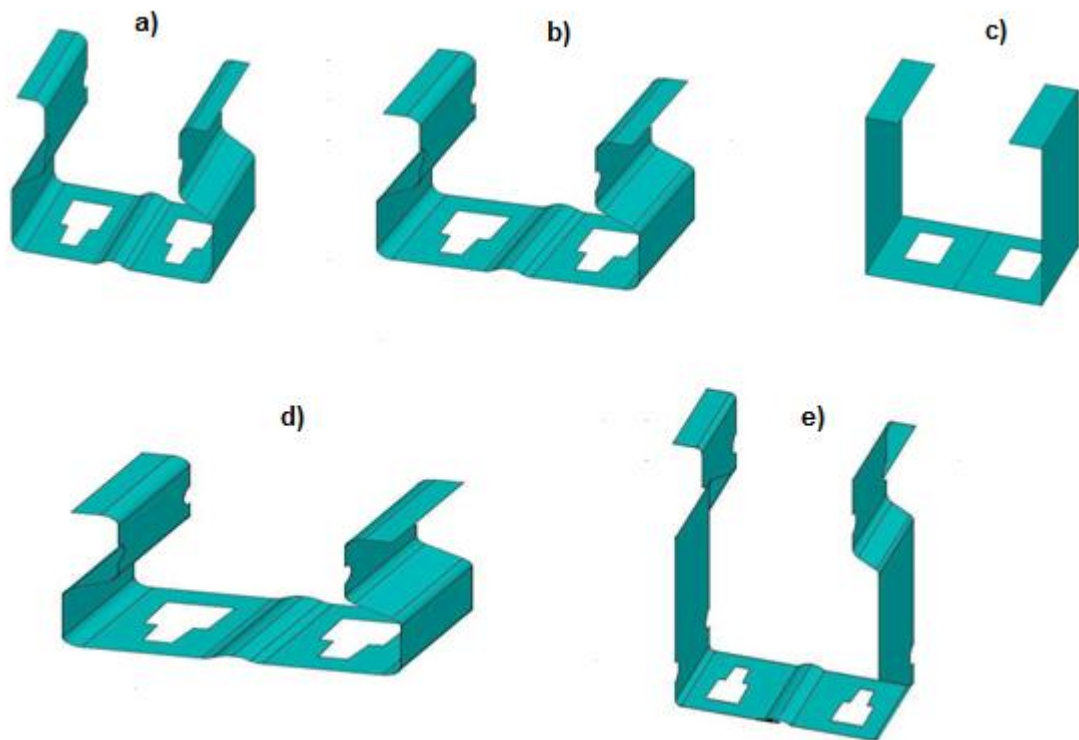


Figura 1.2-Secciones originales de los perfiles estudiados. a) S1, b) S2, c) S3, d) S4, e) S5.

Como se puede apreciar en la figura anterior, los cinco perfiles propuestos se han escogido con grandes diferencias en la forma, tamaño y geometría de la sección para poder estudiar el grado de dependencia de las cargas críticas elásticas de Pandeo (P_{cr}) frente a sus características geométricas.

Además, para simplificar el estudio con el objetivo de obtener modelos válidos y adecuadamente calibrados para todo tipo de perfiles en cuanto a su geometría se refiere, se ha propuesto una geometría simplificada de los perfiles anteriores con las siguientes consideraciones:

- Se estudiarán puntales con perforaciones únicamente en el alma del perfil.
- No se dispondrá ningún tipo de rigidizador en el alma del perfil.
- Se eliminarán los cantos redondeados en sustitución de cantos vivos.
- Las perforaciones son de sección rectangular.



De esta forma, las secciones simplificadas de los perfiles que se han analizado en este proyecto son los que se muestran en la siguiente figura:

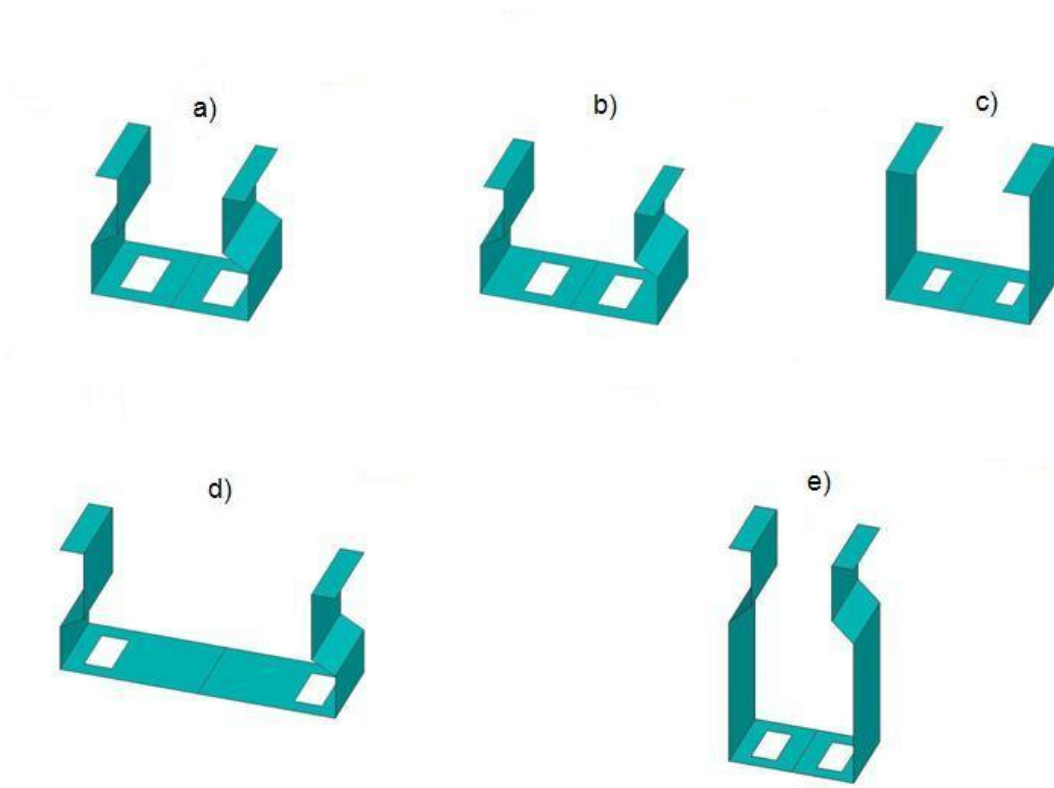


Figura 1.3-Secciones simplificadas de los perfiles estudiados a)S1,b)S2,c)S3,d)S4,e)S5.

La siguiente tabla muestra las principales dimensiones de los puntales estudiados expresadas en mm.

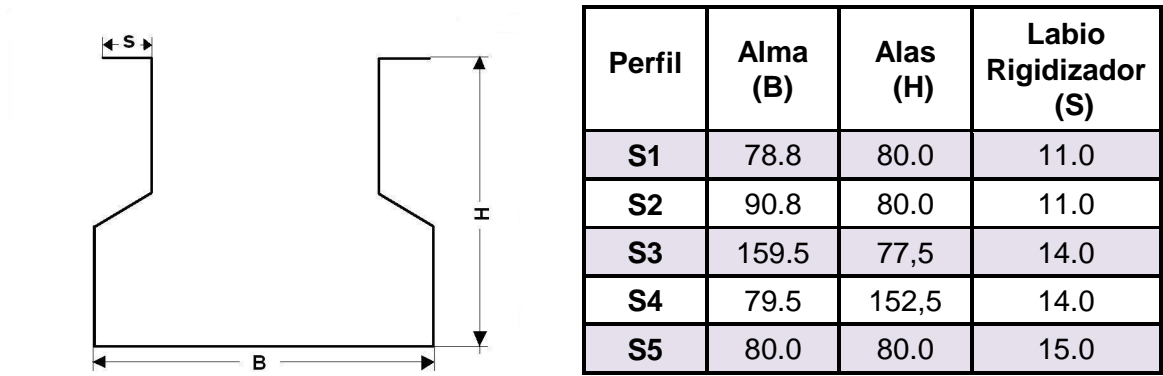


Figura 1.4-Dimensiones principales de la sección y Tabla 1.1- Dimensiones principales en mm de la sección de los puntales de estudio.

Para estudiar el efecto de las perforaciones sobre la carga crítica elástica, se propone un patrón de perforaciones rectangulares con tamaños similares a las de los puntales existentes en el mercado tal y como muestra la Figura 1.4.

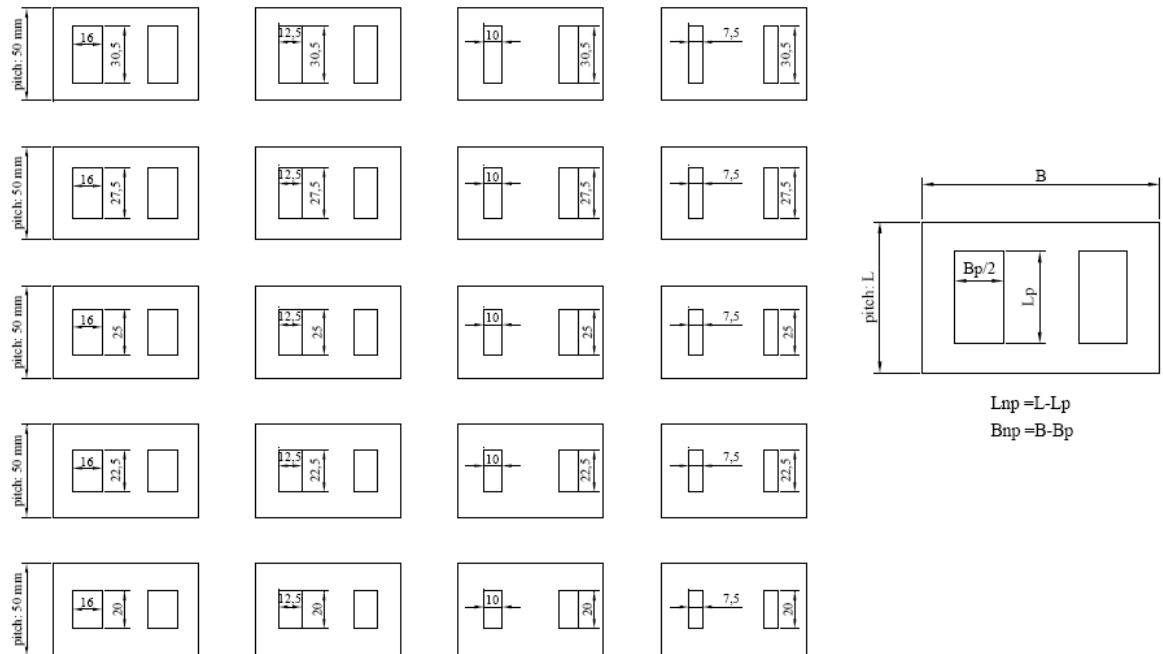


Figura 1.4-Patrón de perforaciones analizado para cada perfil (dimensiones en mm).

Respecto al espesor del perfil, se ha propuesto realizar el estudio para tres tipos de espesores distintos correspondientes a los producidos habitualmente por los fabricantes de S1 y S2. Estos espesores son: 1,8mm; 2mm; y 2,5 mm.

A pesar de que en el mercado existen secciones de puntales mucho más complejas, las simplificaciones consideradas anteriormente se llevan a cabo para desarrollar modelos simples y genéricos fáciles de calibrar. De esta forma, en el capítulo 8 se pondrá de manifiesto la validez de estos modelos calibrados para cualquier tipo de sección, por muy compleja que sea, con la idea de investigar el alcance de los mismos.



1.4 Contenido del proyecto

El primer volumen de la memoria del proyecto se ha organizado en ocho capítulos. Para complementar estos capítulos con la información necesaria para su entendimiento se han redactado además ocho anexos que se encuentran detallados en los volúmenes II y III.

A continuación se describe brevemente el contenido de cada uno de los ocho capítulos y los ocho anexos que constituyen el presente proyecto:

VOLUMEN I

El **capítulo 1** de la memoria se ha destinado a presentar el origen y objetivos del proyecto. Al mismo tiempo, se presentan los puntales analizados a lo largo de todo el desarrollo del proyecto y que sientan las bases del mismo. En el anexo A se aporta la información complementaria a este primer capítulo.

El **capítulo 2** aborda el tema de los antecedentes sobre los modos de pandeo (local, distorsional y global) en perfiles de chapa conformada en frío. Además, en este capítulo se explican los métodos comúnmente utilizados en el análisis de pandeo elástico y se describen las diferencias, limitaciones, ventajas e inconvenientes de estos métodos de cálculo.

El **capítulo 3** explica el Método de la Resistencia Directa (*DSM*) y las ventajas de su aplicación en el cálculo de la resistencia (P_n) del perfil analizado. El empleo de este método justifica el estudio y desarrollo de una nueva formulación para la determinación de los parámetros de entrada (cargas críticas elásticas) que el *DSM* necesita en su aplicación. Por ello, en este tercer capítulo, se ha realizado un esquema explicativo del procedimiento de cálculo que se llevará a cabo a lo largo de todo el proyecto.

En el **capítulo 4** se recogen las consideraciones previas que se han de tener presente para desarrollar el procedimiento de cálculo descrito en el capítulo anterior. En este sentido, se alude al concepto de espesor reducido justificando la necesidad de su utilización para calcular las cargas críticas mediante el *FSM* con el programa CUFSM. Por último, en este capítulo se explica además todos los conocimientos estadísticos básicos necesarios para la realización de los posteriores estudios y análisis estadístico de los datos de espesor reducido que se obtendrán en las etapas de cálculo.

El **capítulo 5** incluye los cálculos de la carga crítica elástica realizados para los puntales objeto de estudio mediante el Método de los Elementos Finitos (*FEM*) y las conclusiones obtenidas en esta etapa de cálculos previos.

El **capítulo 6** presenta los cálculos de la carga crítica elástica realizados para los puntales objeto de estudio mediante el Método de la Banda Finita (*FSM*) así como las conclusiones sobre los cálculos previos de espesor reducido mediante CUFSM.

El **capítulo 7** se ha reservado al estudio estadístico de los modelos de espesor reducido cuyos valores se han obtenido en el capítulo anterior. En este capítulo se realiza la determinación de los parámetros geométricos y el estudio de correlación lineal correspondiente así como los estudios de regresión lineal de los perfiles analizados en función del modo de inestabilidad (local, distorsional y global). En el último apartado de este capítulo se muestran las conclusiones de los modelos que se han obtenido.

El **capítulo 8** muestra un estudio de validación de los modelos para cada tipo de inestabilidad obtenidos en el capítulo 7. Se presenta además un apartado donde se discute los resultados obtenidos en esta etapa de verificación sobre la validez de los modelos.

El **volumen I** de la memoria finaliza con un apartado de conclusiones generales del proyecto así como también se presentan las posibles vías de investigación que pueden desarrollarse en el futuro a partir del presente proyecto.

Por último se detallan todas las referencias bibliográficas que se han utilizado en la realización y redacción de este proyecto.

Como se ha comentado anteriormente y para cumplimentar este primer volumen, se han redactado paralelamente los volúmenes II y III correspondientes a los anexos necesarios del proyecto y cuyos contenidos son:



VOLUMEN II

El **Anexo A** incluye la geometría de las secciones de los cinco perfiles analizados y la geometría de las secciones de los diez perfiles empleados en la etapa de comprobación y verificación de los modelos de espesor reducido obtenidos establecidos en el capítulo 8 del proyecto.

El **Anexo B** muestra los métodos de cálculo existentes en la aplicación del Método de los Elementos Finitos (*FEM*) mediante Ansys.

El **Anexo C** muestra la implementación de las macros de Ansys utilizadas para realizar los cálculos lineales de los modos de local, distorsional y global de los perfiles analizados.

VOLUMEN III

El **Anexo D** contiene la implementación de los modelos en CUFSM necesarios para el análisis de los puntales a través del Método de las Bandas Finitas (*FSM*).

El **Anexo E** contiene las tablas de resultados de espesor reducido para los modos local, distorsional y global calculados en CUFSM mediante la calibración de las cargas críticas elásticas de pandeo obtenidas en Ansys.

El **Anexo F** contiene las tablas con los valores de las variables obtenidas a partir de los parámetros geométricos de cada perfil analizado y los estudios estadísticos de correlación lineal realizados para la obtención de los modelos de espesor reducido local, distorsional y global.

En el **Anexo G** se realiza un breve estudio sobre el impacto ambiental producido en la ejecución del proyecto.

Finalmente, el **anexo H** contiene el presupuesto del proyecto en el que se detalla la valoración económica del presente proyecto.

CAPÍTULO 2

INTRODUCCIÓN AL COMPORTAMIENTO DE LOS PERFILES DE CHAPA CONFORMADA EN FRÍO

2.1 Antecedentes sobre los modos de pandeo en perfiles de chapa conformada en frío.

Los perfiles de chapa conformada en frío y sección abierta, cuando son sometidos a tensiones normales de compresión, sobre la totalidad o parte de la sección, presentan tres modos o clases de pandeo comúnmente distinguidos: local, distorsional y global.

A pesar de que la literatura ha adoptado estas definiciones para los modos de pandeo en perfiles de paredes delgadas, actualmente no existe un acuerdo para definir de forma rigurosa cada uno de estos modos. Sin embargo, las definiciones más utilizadas en la literatura son:

2.1.1 Abolladura Local

La abolladura local es el modo de pandeo que presenta la longitud de pandeo más corta de los tres modos existentes, y, a su vez, ésta longitud corta de pandeo es menor o igual a la anchura de cualquiera de las placas que forman la sección transversal del perfil. La característica principal de este modo de pandeo es que presenta únicamente deformaciones de placa sin que se produzcan traslaciones de las líneas de intersección de dos elementos placa adyacentes.

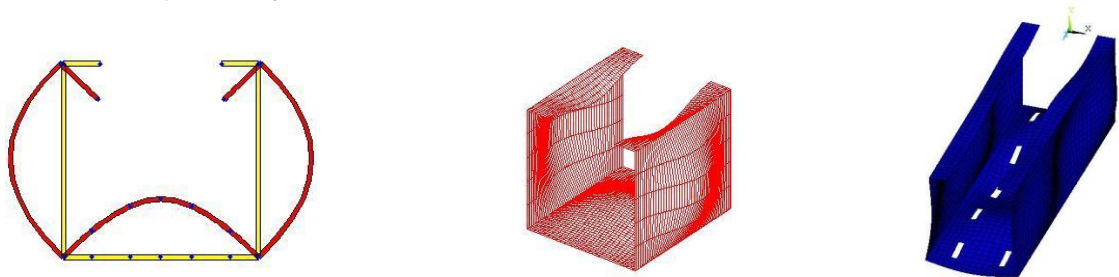


Figura 2.1-Pandeo local de un perfil tipo C.

Vista de la sección transversal (izquierda), vista de la sección 3D (centro) y vista de la sección 3D con perforaciones en el alma (derecha).



2.1.2 Pandeo Global

Es el modo de pandeo de mayor sencillez en el que se produce el desplazamiento con o sin torsión de la directriz del perfil de manera que el perfil pandea sin modificar la forma de su sección. Además, la longitud asociada a este modo de pandeo es la más elevada de los tres modos considerados.

En función de las deformaciones que se obtienen tras el pandeo global del perfil, éste se puede clasificar a su vez en:

- pandeo global de flexión sobre el eje y (F_y).
- pandeo global de flexión sobre el eje z (F_z).
- pandeo por torsión (T).
- pandeo global de flexo-torsión (FT)

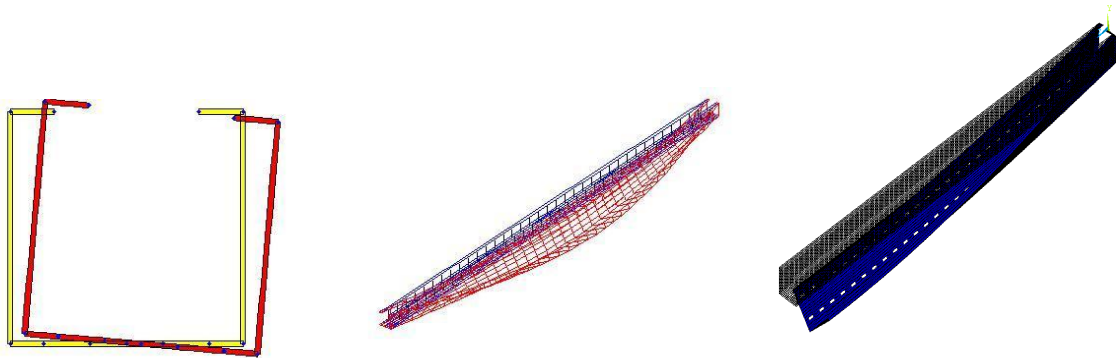


Figura 2.2-Pandeo global de un perfil tipo C.

Vista de la sección transversal (izquierda), vista de la sección 3D (centro) y vista de la sección 3D con perforaciones en el alma (derecha).

2.1.3 Pandeo Distorsional

La longitud de pandeo asociada al modo distorsional se encuentra normalmente entre el modo local y el modo global.

Así mismo, el modo de pandeo distorsional se considera el más complejo de los tres puesto que, además de poder presentar deformaciones de placa como en el caso de la abolladura

local, presenta distorsión de la sección del perfil con la consiguiente translación de algunas líneas de intersección entre dos elementos placa adyacentes.

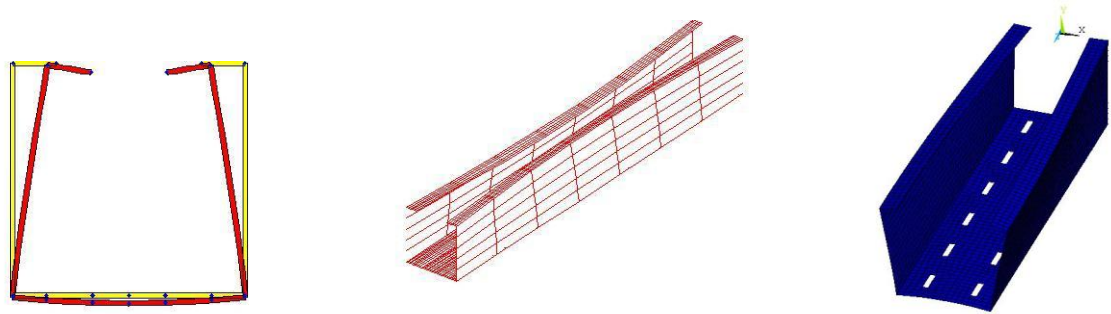


Figura 2.3-Pandeo distorsional de un perfil tipo C.

Vista de la sección transversal (izquierda), vista de la sección 3D (centro) y vista de la sección 3D con perforaciones en el alma (derecha).

Cabe mencionar además que, en la práctica, a veces el patrón de deformaciones del perfil no responde a un único modo de pandeo puro (ya sea local, global o distorsional) sino que muestra características de varios modos de pandeo a la vez, lo que se denomina comúnmente como modos de pandeo combinados o acoplados.

Tal y como se describe en [8], se pone de manifiesto que las definiciones y el cálculo de los modos de pandeo descritos anteriormente en algunos casos prácticos no son lo suficientemente precisos originando confusiones y resultados ambiguos y subjetivos.



2.2 Análisis de Pandeo elástico

2.2.1 Introducción

El análisis de pandeo elástico de perfiles de acero conformado en frío se basa, por lo general, en la determinación de las cargas de pandeo (momentos) y en la forma de los modos de pandeo local, global y distorsional.

A pesar de que la información que ofrece el análisis de pandeo elástico no predice de forma directa la capacidad o conducta de colapso de la sección del perfil analizado, tanto el modo de pandeo como su carga crítica elástica de pandeo asociada son aproximaciones importantes para el comportamiento real de la sección del perfil.

2.2.2 Métodos de cálculo de las fuerzas críticas de pandeo

En la actualidad, no existe una formulación analítica suficientemente rigurosa y determinista para el cálculo de la carga de pandeo en todos los modos (local, global y distorsional) aplicable a perfiles de acero conformado en frío de paredes delgadas y sección abierta. Las herramientas generales de cálculo existentes referentes a este tema son demasiado engorrosas o bien están demasiado limitadas en su aplicabilidad a proporcionar un instrumento general de cálculo.

Los métodos numéricos más utilizados para el cálculo de las cargas de pandeo son:

El Método de los Elementos Finitos, *FEM* (de sus siglas en inglés *Finite Element Method*), el Método de la Banda Finita, *FSM* (del inglés *Finite Strip Method*) y por último la Teoría de la Viga Generalizada, *GBT* (del inglés *Generalised Beam Theory*).

Si bien estos métodos numéricos de cálculo son considerados como las formas más eficaces y ampliamente utilizados para determinar las cargas críticas, cada método tiene ciertas limitaciones.

A continuación se comentarán las principales ventajas e inconvenientes entre los tres métodos.

2.2.3 El Método de los Elementos Finitos (FEM)

El Método de los Elementos Finitos (*FEM*) es el método más popular en la ingeniería de cálculo estructural y se aplica prácticamente a cualquier tipo de elemento estructural, bajo cualquier sollicitación de carga y condiciones de contorno.

El *FEM*, junto al Método de la Banda Finita, ha sido uno de los métodos más utilizados inicialmente para el cálculo de cargas críticas elásticas en estudios dedicados específicamente a los modos de inestabilidad. Sin embargo, en la actualidad, para el cálculo y análisis de perfiles de acero conformados en frío y de sección abierta se prefiere el Método de la Banda Finita (*FSM*) y, en estos últimos años, la Teoría de la Viga Generalizada.

Esto es debido en gran parte a que el *FEM* presenta el principal inconveniente de que necesita tiempos de cálculo bastante elevados debido a que en la realización del modelo a estudiar, el número de elementos finitos necesarios para la discretización e interpolación del modelo es relativamente elevado, y, por consiguiente, también lo es el número de grados de libertad.

A todo esto hay que añadir que el *FEM* presenta además el inconveniente de que no es capaz de distinguir y clasificar automáticamente todos los modos de pandeo que calcula, por lo que esto supone al usuario una difícil tarea y una dedicación de tiempo adicional puesto que para solventar esta problemática, el usuario ha de realizar un análisis visual de las deformadas para clasificar, con cierto grado de subjetividad, los modos de pandeo calculados.

En cuanto a su disponibilidad se refiere, actualmente existen numerosos paquetes de software que emplean este método de cálculo, aunque el precio de estas aplicaciones es generalmente muy elevado.

2.2.4 El Método de la Banda Finita (*FSM*)

El uso del Método de la Banda Finita (*FSM*) ha demostrado ser una eficiente herramienta para el análisis de perfiles de acero conformados en frío con sección geométrica regular y condiciones de contorno simple.

El *FSM* es de hecho, una variación del método de los elementos finitos puesto que ambos métodos utilizan la misma metodología básica. La única diferencia entre *FEM* y *FSM* es la discretización [9]. Mientras que el *FEM* emplea discretización del perfil en las direcciones, transversal y longitudinal, el *FSM* emplea discretización del perfil únicamente en la dirección transversal y un solo elemento (banda) para modelar la dirección longitudinal como se muestra en la Figura 2.4. La dirección longitudinal utiliza unas funciones de forma especiales [10] capaces de describir el patrón de deformaciones a lo largo de la longitud del perfil. Respecto a estas funciones de forma, las referencias estudiadas muestran dos posibles vías para realizar los análisis *FSM*:



i)El *Método de la Banda Finita Semianalítico*, que emplea funciones de forma polinómicas en la dirección transversal del perfil y se pueden calcular las tensiones elásticas de pandeo para una semi-longitud de onda.

ii)El *Método de la Banda Finita Spline*, que emplea funciones tipo spline en sustitución de las anteriores y el cálculo se realiza para una longitud de perfil determinada.

Como consecuencia de ello, el empleo de *FSM* reduce considerablemente el número total de elementos o ecuaciones necesarias para la solución y, por lo tanto, el tiempo de cálculo, en comparación con la de una solución típica de elemento finito.

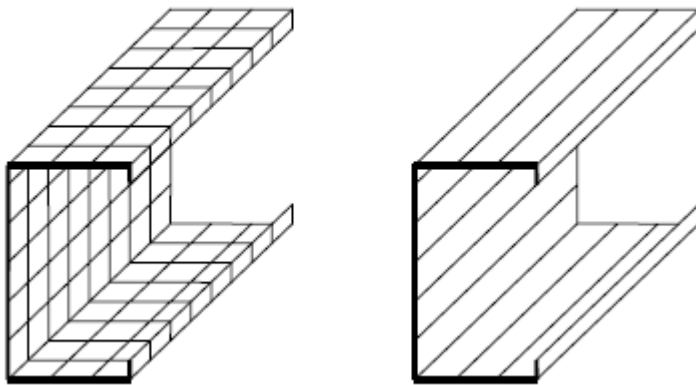


Figura 2.4- Discretización de un perfil tipo C según *FEM* (izquierda) y según *FSM* (derecha)

Fuente: Distorsional buckling of cold-formed steel members in bending [9].

Por lo general, la curva representada mediante este método presenta un primer mínimo que determina las condiciones de factor de fuerza crítica y longitud de pandeo local del perfil, y un segundo valor mínimo asociado al pandeo distorsional del mismo tal y como se muestra en la Figura 2.5.

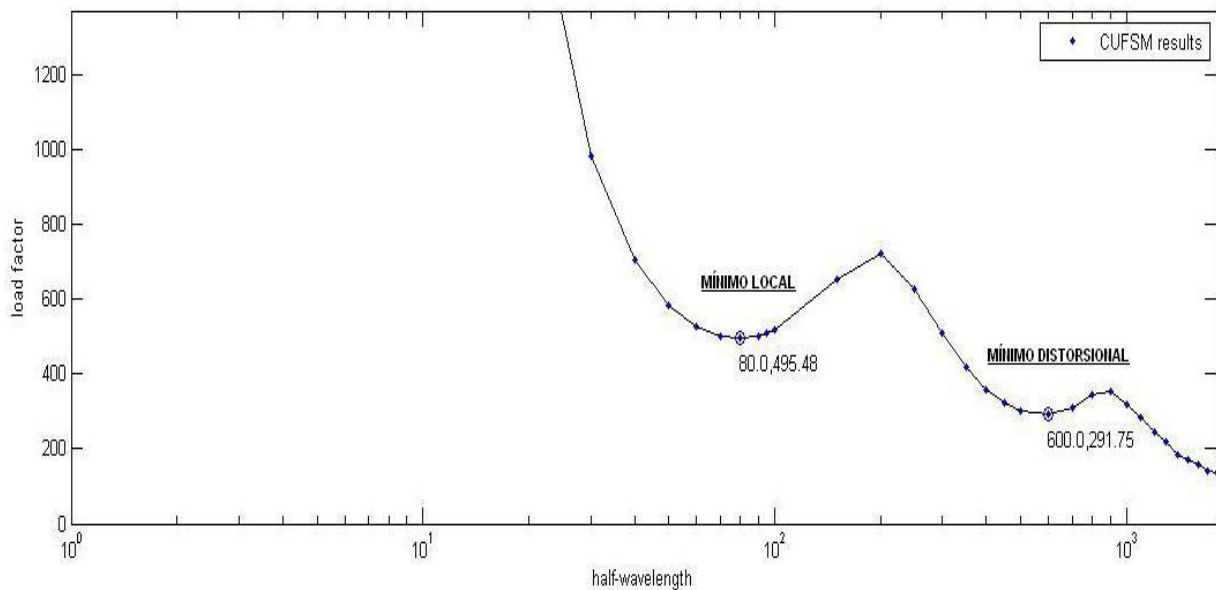


Figura 2.5-Ejemplo de curva de factor de carga & longitud para un perfil tipo C y su correspondiente identificación modal de mínimos de abolladura local y pandeo distorsional.

Existen casos en los que la gráfica que proporciona *FSM* para el perfil estudiado presenta uno (local o distorsional), los dos, o ningún mínimo modal [1].

Hasta hace escasos meses (Noviembre de 2010 aproximadamente) *FSM* presentaba el inconveniente de ser un método de cálculo muy limitado en cuanto a las condiciones de enlace se refiere, pues sólo contemplaba el caso de la condición de contorno simplemente apoyada, lo que presentaba un inconveniente a la hora de considerar las cargas críticas obtenidas para el modo distorsional puesto que los enlaces para este modo normalmente no son articulados. Por ello, sólo se podía considerar como válidos aquellos cálculos que garantizaban la no influencia de las condiciones de enlace sobre el comportamiento del perfil para este modo.

Ese mismo mes, los Sres. Z.Li y B.W.Schafer [10] presentaron una base teórica para el análisis de pandeo elástico de los perfiles de acero conformados en frío bajo condiciones de contorno generales que incluso ya está implementada en las nuevas actualizaciones de software de cálculo, como por ejemplo la nueva versión 4.03 de CUFSM [6].

2.2.5 La Teoría de la Viga Generalizada (GBT)

GBT es una extensión a la ingeniería convencional de la teoría vigas [11] que se aplica actualmente al análisis de pandeo de piezas prismáticas y paredes delgadas y que permite contemplar la distorsión transversal de la sección [12].



GBT trabaja directamente con los modos de deformación de la sección de tal forma que permite realizar análisis lineales de pandeo para un solo modo o una combinación de los mismos escogida a voluntad.

En este sentido, la teoría *GBT* tiene dos características principales [13]:

i) la primera es que trabaja con modos de deformación ortogonales (Fig. 2.6), como por ejemplo, los modos distorsionales y locales, cuya cantidad depende del número de elementos de sección, y los cuatro modos de sólido rígido (axial, flexión según los dos ejes principales de inercia y torsión).

ii) la segunda es que para perfiles con condiciones de enlace sencillas permite utilizar procedimientos analíticos de cálculo de cargas críticas similares para todos los modos.

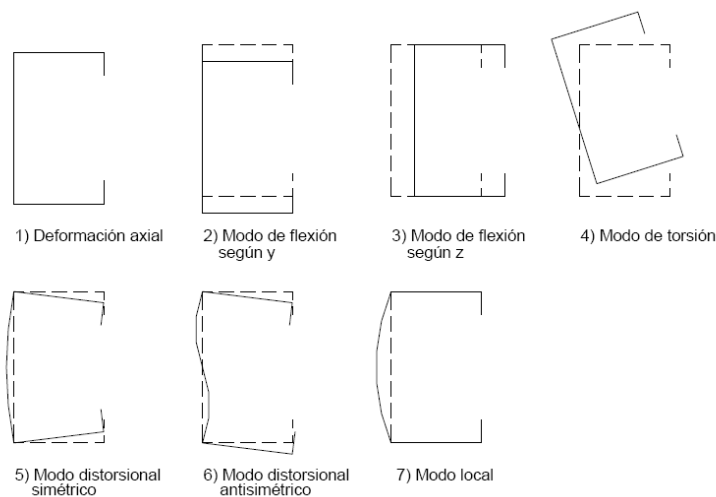


Figura 2.6- Modos considerados en un análisis lineal de pandeo realizado mediante *GBT*.

Fuente: Comportamiento de perfiles perforados de chapa conformada sometidos a flexo-compresión [13].

Las principales ventajas de la *GBT* son, por un lado, que permite incorporar los efectos de la distorsión de la sección del perfil de forma natural al cálculo, como si se tratara de un modo de sólido rígido, lo cual justifica que su mayor aplicación se deba al estudio de las inestabilidades de los perfiles de acero conformado en frío y de sección abierta, donde el modo de pandeo distorsional juega un papel importante.

Por otro lado, es capaz de clasificar y calcular los modos de pandeo de una forma automática e independiente para cada modo.

Otra ventaja considerable que ofrece la *GBT* es que requiere un tiempo de cálculo menor en comparación con *FSM* y *FEM*, ya que *GBT* trabaja con menor número de grados de libertad.

En contrapartida, *GBT* introduce una serie de hipótesis simplificadas referentes a la deformación del perfil que limitan su campo de aplicación. Este inconveniente, junto al hecho de que existe poca información sobre *GBT* (1989 por R.Schardt) [14,15 16 y 17] hacen que su uso no esté tan extendido como *FEM* o *FSM* y que apenas exista software implementado con la *GBT*.



CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA DE CÁLCULO

3.1 Introducción

En este capítulo se presenta el método de la Resistencia Directa (DSM, de sus siglas en inglés *Direct Strength Method*) y la formulación que emplea este método en función del modo de inestabilidad (local, distorsional o global).

Además, puesto que la aplicación de este método requiere la determinación de las cargas críticas elásticas de pandeo modal (inputs) la dificultad de su utilización se ve reflejada en el hecho de cómo calcular estas cargas a partir de un método rápido, sencillo, implementado en software de acceso libre y gratuito y en general, de una manera eficaz.

Por estos motivos, el objetivo de este proyecto, como ya se ha apuntado en el capítulo 1, reside en desarrollar una formulación válida y eficiente para poder aplicar el Método de las Bandas Finitas (FSM) en el cálculo de las cargas críticas elásticas de pandeo modal de perfiles perforados.

Finalmente, en el apartado 3.3 de este capítulo se muestra la representación de un esquema explicativo sobre la formulación y el procedimiento que se llevará a cabo a lo largo de todo el proyecto para el cálculo de las cargas críticas de pandeo para los modos local, distorsional y global.

3.2 Método de la Resistencia directa (DSM)

El *DSM* es un método de diseño totalmente nuevo para los perfiles de acero conformado en frío y que ha tenido su reconocimiento oficial como método de cálculo en el año 2004 por la *North American Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members* (AISI 2004) [18].

EL uso de *DSM* requiere, por un lado, la determinación del comportamiento elástico de pandeo del perfil y, por otro lado, el uso de esa información en una serie de curvas de resistencia a la rotura para predecir la fuerza.



Por tanto, a diferencia de otros métodos de cálculo, el *DSM* no se basa en el cálculo del área eficaz de la sección ni requiere cálculos iterativos para determinar las propiedades efectivas de la sección de los perfiles.

La principal dificultad que presenta el *DSM* es que se debe determinar el valor de la carga elástica de pandeo para los modos local (P_{crl}), global (P_{cre}) y distorsional (P_{crd}), tarea que no es nada sencilla y que justifica el origen de este proyecto.

Posteriormente, estos valores de carga obtenidos, junto al valor de la carga de límite elástico (P_y), se introducen en una serie de ecuaciones simples con el fin de determinar directamente el valor de la resistencia del perfil (P_n) [18, 19].

De este modo, la premisa básica del *DSM* se puede escribir de la siguiente forma:

$$P_n = f(P_{crl}, P_{cre}, P_{crd}, P_y)$$

La formulación que sigue el *DSM* según el modo de inestabilidad [20], es la siguiente:

Distortional Buckling
 The nominal axial strength, P_{nd} , for distortional buckling is

for $\lambda_{dnet} \leq 0.561$ $P_{nd} = P_{ynet}$

for $\lambda_{dnet} > 0.561$ $P_{nd} = \left(1 - 0.25 \left(\frac{P_{crd}}{P_{ynet}} \right)^{0.6} \right) \left(\frac{P_{crd}}{P_{ynet}} \right)^{0.6} P_{ynet}$

where $\lambda_{dnet} = \sqrt{P_{ynet}/P_{crd}}$

P_{crd} = Critical elastic distortional column buckling load ... (including hole(s))

Figura 3.1-Formulación para la determinación de la resistencia axial correspondiente al modo de pandeo local.

Fuente: Direct strength Design for Cold-Formed Steel Members with Perforations.

Progress Report N°4 [20].

Flexural, Torsional, or Torsional-Flexural Buckling

The nominal axial strength, P_{ne} , for flexural, ... or torsional- flexural buckling is

$$\text{for } \lambda_{cnet} \leq 1.5 \quad P_{ne} = (0.658^{\lambda_{cnet}^2}) P_{ynet}$$

$$\text{for } \lambda_{cnet} > 1.5 \quad P_{ne} = \left(\frac{0.877}{\lambda_{cnet}^2} \right) P_{ynet} = 0.877 P_{cre}$$

$$\text{where } \lambda_{cnet} = \sqrt{P_{ynet}/P_{cre}}$$

$$P_{ynet} = A_{net} F_y$$

P_{cre} = Critical elastic global column buckling load ... (including hole(s))

A_{net} = net area of the column

Figura 3.2-Formulación para la determinación de la resistencia axial correspondiente al modo de pandeo global.

Fuente: Direct strength Design for Cold-Formed Steel Members with Perforations.

Progress Report N°4 [20].

Local Buckling

The nominal axial strength, $P_{n\ell}$, for local buckling is

$$\text{for } \lambda_{\ell} \leq 0.776 \quad P_{n\ell} = P_{ne}$$

$$\text{for } \lambda_{\ell} > 0.776 \quad P_{n\ell} = \left[1 - 0.15 \left(\frac{P_{c\ell\ell}}{P_{ne}} \right)^{0.4} \right] \left(\frac{P_{c\ell\ell}}{P_{ne}} \right)^{0.4} P_{ne}$$

$$\text{where } \lambda_{\ell} = \sqrt{P_{ne}/P_{c\ell\ell}}$$

$P_{c\ell\ell}$ = Critical elastic local column buckling load ... (including hole(s))

P_{ne} is defined above

Figura 3.3-Formulación para la determinación de la resistencia axial correspondiente al modo de pandeo local.

Fuente: Direct strength Design for Cold-Formed Steel Members with Perforations.

Progress Report N°4 [20].

Para el cálculo de las cargas elásticas de pandeo que requiere el *DSM*, [21] propone el uso de CUFSM [1], un programa de acceso libre basado en la metodología *FSM* [22,23] (Para más información sobre el programa CUFSM el lector puede consultar Anexo E). Una desventaja que presenta el *DSM* es que no explica de una forma suficientemente precisa el efecto de las perforaciones de los perfiles de chapa conformada en frío para puntales utilizados en estanterías [24].



Debido a que los puntales de las columnas de estanterías son perfiles con perforaciones practicadas a lo largo de su longitud, tanto en el alma como en las alas, se propone trabajar con espesores reducidos equivalentes en las zonas perforadas del perfil.

3.3 Presentación del procedimiento de cálculo

El objetivo final de este estudio es el de calcular las cargas críticas de pandeo elástico. Debido a que actualmente no es posible obtener estos cálculos para perfiles perforados de una forma directa mediante el *FSM*, se propone trabajar conjuntamente con el espesor reducido en las bandas perforadas tal y como se ha comentado en el apartado 1.2 de este proyecto. Para lograr este objetivo, se decide determinar una formulación del espesor reducido equivalente en las zonas perforadas del perfil para cada uno de los tres modos de inestabilidad (local, global y distorsional).

En la siguiente figura se presenta de manera general las fases que se van a seguir durante todo el estudio:

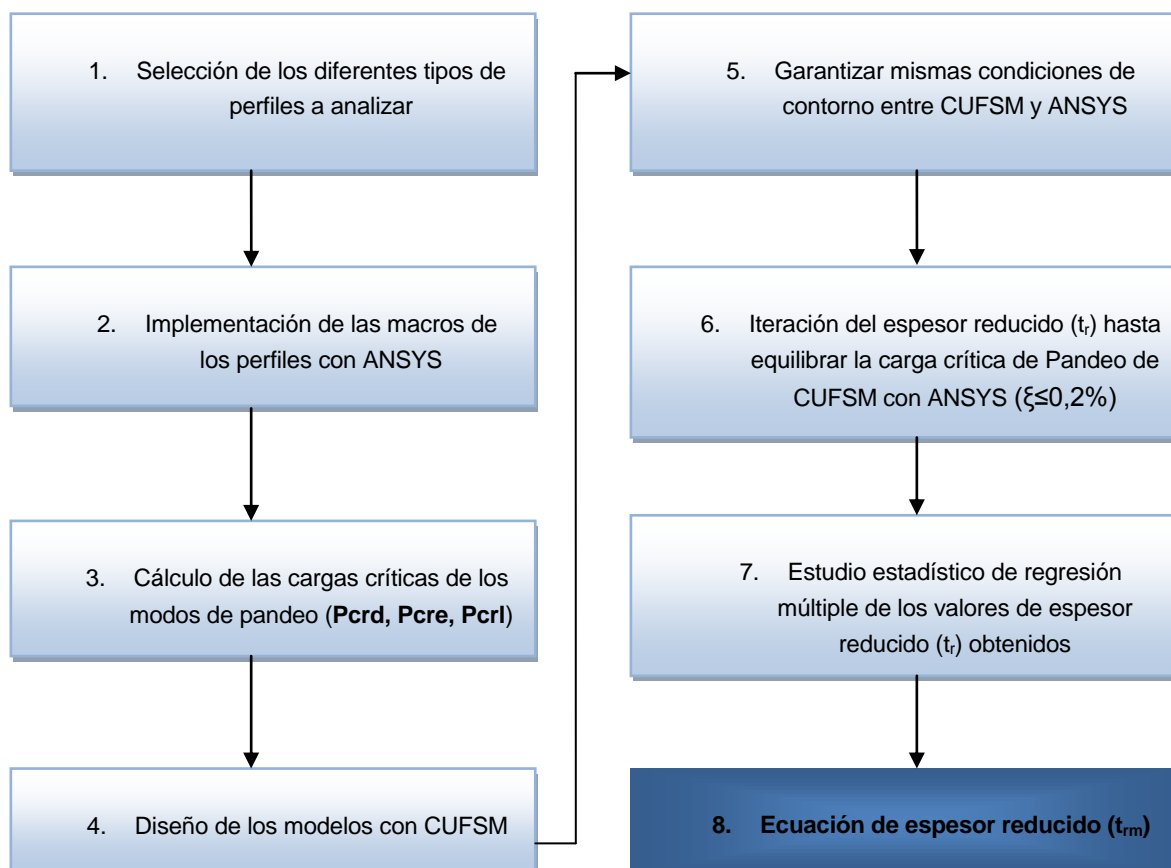


Figura 3.4-Esquema explicativo de las fases de cálculo del proyecto.

Posteriormente, estas ecuaciones de espesor reducido, una para cada modo de inestabilidad, se introducirán en CUFSM para calcular la carga crítica de los modos de pandeo (P_{crm}) de los perfiles conformados en frío que se deseen analizar. A partir de ellas y empleando el *DSM* se propone calcular, en estudios futuros, la resistencia del perfil analizado (P_n).

$$t_r \rightarrow P_{crm} \rightarrow P_n(P_{crm}, P_y)$$



CAPÍTULO 4

CONSIDERACIONES PREVIAS

4.1 Concepto de espesor reducido

La Figura 4.1 muestra un ejemplo de modelos realizados mediante el programa de cálculo CUFSM con espesores reducidos. En la siguiente ilustración se puede apreciar que el espesor reducido sólo se aplica a las bandas donde se encuentra la perforación.

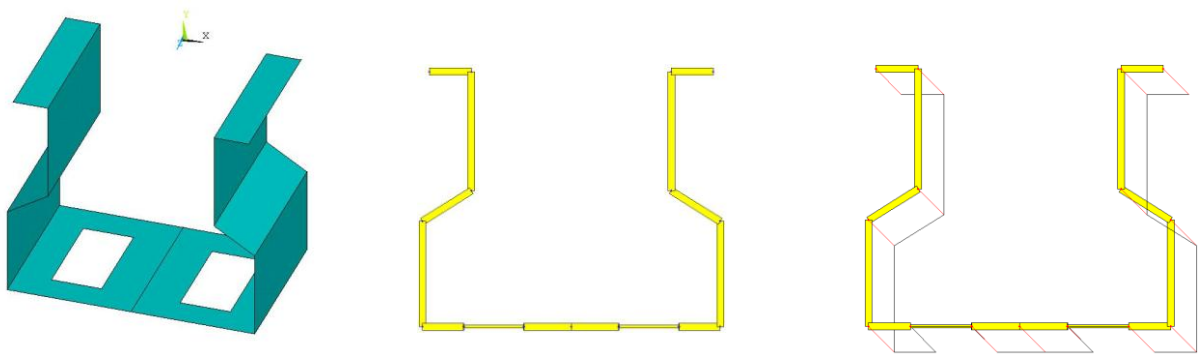


Fig.4.1-Ejemplo de sección de un perfil tipo Ω . Geometría inicial del modelo en ANSYS (izquierda), Modelo con espesor reducido en CUFSM (centro) y tensiones consideradas en la sección del modelo en CUFSM (derecha).

Se han llevado a cabo cientos de análisis de pandeo lineal de las secciones. A su vez, estos análisis se han realizado con diversos patrones de perforaciones para cada una de las secciones analizadas.

Posteriormente, una vez obtenidas las cargas críticas elásticas de pandeo (P_{cr1} , P_{rce} , P_{crd}) para cada uno de los modos de inestabilidad mediante los análisis de elementos finitos correspondientes, a través de CUFSM se determinará de forma iterativa la reducción de espesor necesaria en las bandas perforadas para que el error cometido calculado mediante ANSYS y CUFSM no supere el $\pm 0,2\%$.



4.2 Conocimientos estadísticos básicos.

4.2.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es el de presentar la teoría básica de la estadística así como las herramientas necesarias para poder realizar un análisis estadístico de los datos obtenidos en el proceso de cálculo y proporcionar, en la medida de lo posible, una ecuación que permita estimar el espesor reducido para cada modo de pandeo.

El primer paso en este análisis será el de determinar el grado de relación existente entre variables utilizando modelos matemáticos y representaciones gráficas.

De este modo, para representar la relación entre el espesor reducido (variable explicada o dependiente) en función de los parámetros geométricos del perfil (variables explicativas o independientes) se desarrollará una ecuación para cada modo de pandeo y que permitirá estimar la variable explicada en función de las variables explicativas.

Para estudiar el grado de relación entre dos variables se realizará un análisis de correlación. Posteriormente, una vez conocidas las variables que mayor relación guardan con la variable respuesta (Y), se realizará un análisis de regresión múltiple para estimar el valor de Y en función de las variables explicativas (X).

4.2.2 Conceptos de Correlación Lineal

En ocasiones puede interesar estudiar si existe o no algún tipo de relación entre dos variables aleatorias. Así, por ejemplo, podemos preguntarnos si hay alguna relación entre las notas de la asignatura Elasticidad y Resistencia de Materiales (ERM) y las de Mecánica de los Medios Continuos (MMC). Una primera aproximación al problema consistiría en dibujar en el plano R^2 un punto por cada alumno: la primera coordenada de cada punto sería su nota en ERM, mientras que la segunda sería su nota en MMC. De este modo, se obtendría una nube de puntos que podría indicarnos visualmente la existencia o no de algún tipo de relación (lineal, parabólica, exponencial, etc.) entre ambas notas, o lo que es lo mismo, el tipo de relación entre ambas variables.

En particular, nos interesa cuantificar la intensidad de la relación lineal entre dos variables. El parámetro que nos da tal cuantificación es el coeficiente de correlación lineal de Pearson r , [29] cuyo valor oscila entre -1 y $+1$:

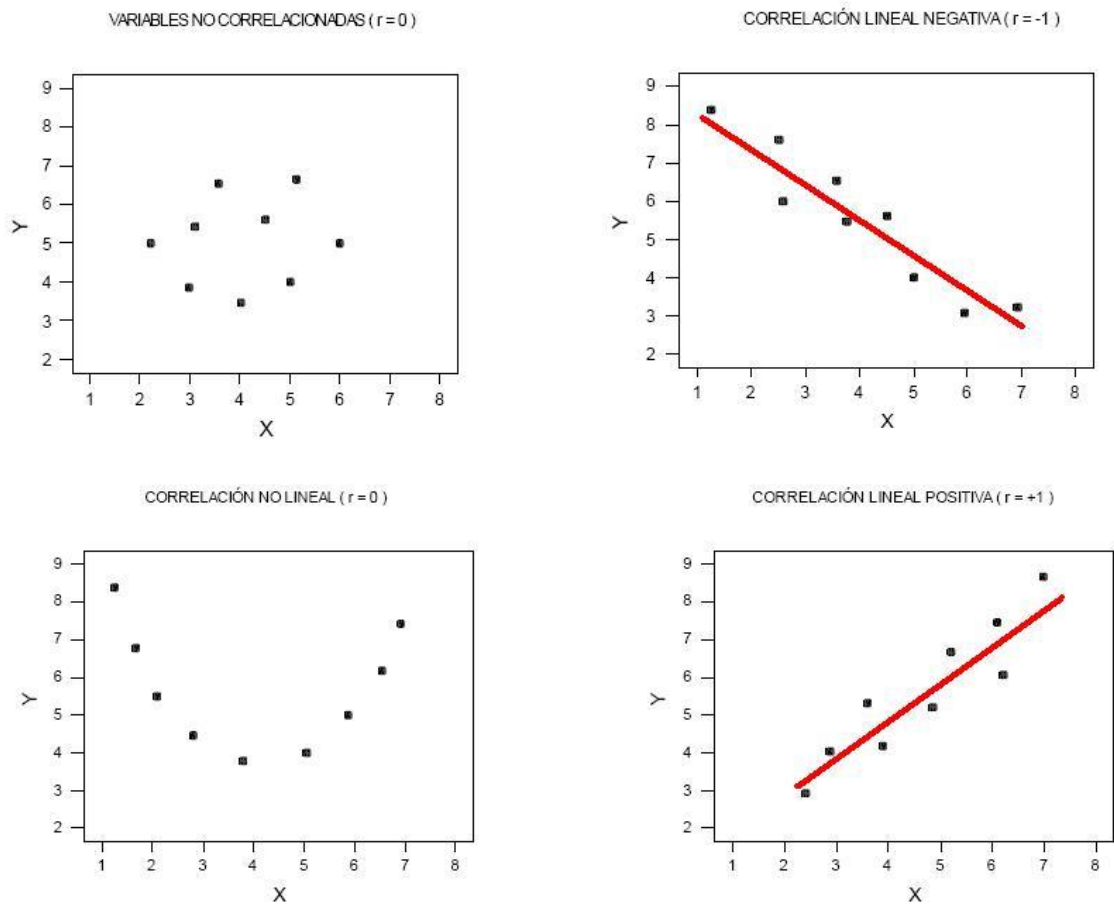


Figura 4.2-posibles tipos de correlación en los diagramas de dispersión.

Fuente: D.A. Lind, R.D. Mason, W.G. Marchal (2001): "Estadística para Administración y Economía". Ed. Irwin McGraw-Hill.F. [30].

La expresión asociada al coeficiente de correlación lineal es:

$$-1 \leq r = \frac{Cov(X, Y)}{S_X \cdot S_Y} = \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}) * (Y_t - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} * \sqrt{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2}} \leq +1$$

Figura 4.3-Expresión del coeficiente de correlación.

Fuente: D.A. Lind, R.D. Mason, W.G. Marchal (2001): "Estadística para Administración y Economía". Ed. Irwin McGraw-Hill.F. [30].



Donde:

- $Cov(X, Y)$ es la covarianza de (X, Y) , o lo que es lo mismo, es la dependencia entre los valores de la variable X y los valores de la variable Y . Si la covarianza es positiva ($Cov(X, Y) > 0$), hay dependencia directa y a grandes valores de X le corresponden grandes valores de Y . Una $Cov(X, Y) = 0$ se interpreta como la no existencia de una relación lineal entre las dos variables estudiadas. Por último, si $Cov(X, Y) < 0$, hay dependencia inversa o negativa, es decir, a grandes valores de X corresponden pequeños valores de Y .
- s_x es la desviación típica de la variable X .
- s_y es la desviación típica de la variable Y .

Como se observa en los diagramas anteriores, el valor de r se aproxima a $+1$ cuando la correlación tiende a ser lineal directa (mayores valores de X significan mayores valores de Y), y se aproxima a -1 cuando la correlación tiende a ser lineal inversa.

Es importante destacar que la existencia de correlación entre dos variables no implica causalidad. De este modo, si no hay correlación de ningún tipo entre dos variables, entonces tampoco habrá correlación lineal, por lo que $r=0$. Sin embargo, el hecho de que ocurra que $r=0$, sólo nos dice que no hay correlación lineal, pero puede que la haya de otro tipo.

El siguiente diagrama resume el análisis del coeficiente de correlación entre dos variables:

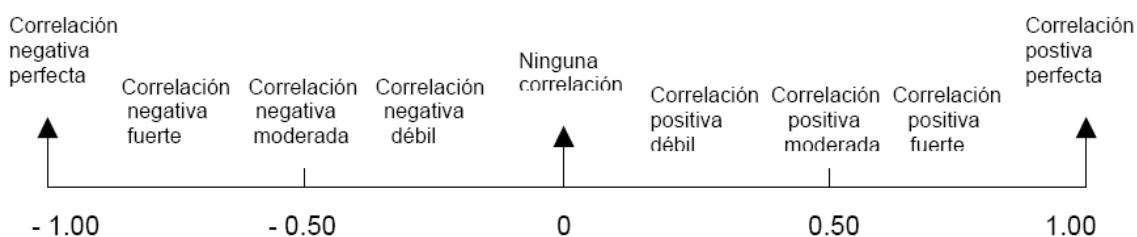


Figura 4.4-Diagrama de correlación entre dos variables.

Fuente: D.A. Lind, R.D. Mason, W.G. Marchal (2001): "Estadística para Administración y Economía". Ed. Irwin McGraw-Hill.F. [30].

4.2.3 Concepto de Regresión Lineal

En aquellos casos en que el coeficiente de regresión lineal sea “cercano” a +1 o a -1, tiene sentido considerar la ecuación de la recta que “mejor se ajuste” a la nube de puntos (recta de mínimos cuadrados). Uno de los principales usos de dicha recta será el de predecir o estimar los valores de Y que obtendríamos para distintos valores de X. Estos conceptos quedarán representados en lo que se denomina diagrama de dispersión:

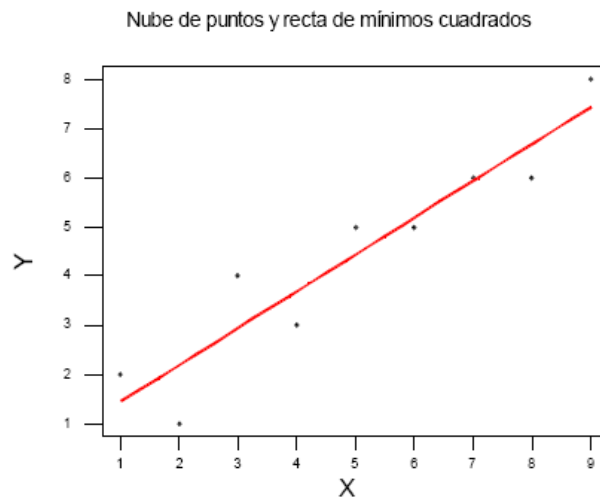


Figura 4.5-Ejemplo de diagrama de dispersión.

La ecuación de la recta de mínimos cuadrados (en forma punto-pendiente) es la siguiente:

$$y - \bar{y} = \frac{Cov(X,Y)}{S_x^2} (x - \bar{x}) \quad (\text{Ec.4.1})$$

4.2.4 Error estándar de estimación (S_{yx})

En los casos reales, las predicciones perfectas son prácticamente imposibles y lo que se necesita es una medida que describa cómo de precisa es la predicción de Y en función de X o, inversamente, qué inexacta puede ser la estimación. A esta medida se le llama error estándar de estimación, se denota por S_{yx} y mide la dispersión alrededor de la línea de regresión.



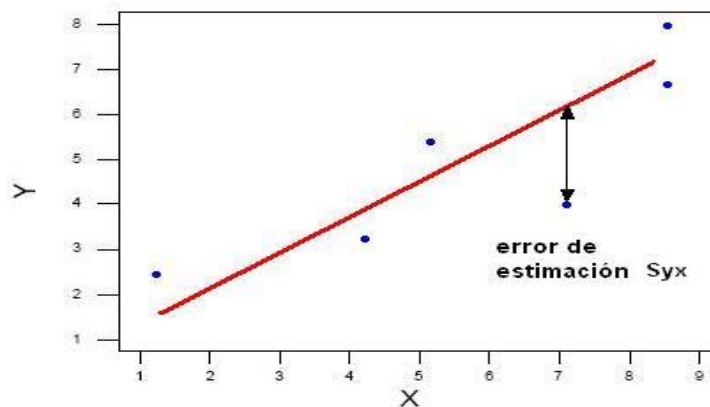


Figura 4.6-Ejemplo gráfico de error estándar de estimación.

De la figura anterior puede observarse que no todos los puntos están en la línea de regresión (línea roja). De hecho, si en un número de observaciones suficientemente grande todos los puntos estuvieran sobre la línea de regresión, no existiría error de estimación. Es decir, en ese caso, no habría diferencia entre el valor observado y el valor de la predicción.

4.2.5 Regresión Lineal Múltiple (RLM)

La Regresión Lineal múltiple (RLM) tiene como objetivo analizar un modelo que pretende explicar el comportamiento de una variable (variable endógena, dependiente o explicada), que se designa como Y , utilizando la información proporcionada por los valores tomados por un conjunto de variables explicativas (exógenas o independientes) que se designan por $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$.

4.2.6 Aplicaciones de la Regresión Lineal Múltiple (RLM)

El MRLM es un método muy poderoso y ampliamente utilizado en investigación (Canavos1988) [31] para:

- Determinar la posibilidad de predecir a través de una expresión muy simple el valor de la respuesta de interés, a partir de los valores observados de una serie de factores (por ejemplo: en esta investigación, se pretende dar respuesta mediante una expresión o ecuación al valor del espesor reducido (t_r) en las zonas perforadas de un perfil de acero conformado en frío con perforaciones a partir de sus características geométricas tales como, longitud, anchura, área neta, longitud perforada, anchura perforada, etc) prestando atención a la cuestión de si los

predictores propuestos son adecuados para modelar en forma lineal la respuesta de interés.

- Determinar la importancia relativa de la asociación lineal entre la respuesta y un predictor respecto a la asociación entre ella y otro predictor, es decir, determinar qué predictores propuestos son eficaces para modelar la respuesta de forma sencilla.
- Estimar la relación lineal entre los predictores y la variable respuesta a partir de los datos de partida estableciendo conclusiones sobre cuál sería el modelo lineal recomendable, sencillo y preciso.

A pesar de que la regresión lineal múltiple se utiliza para la predicción de respuestas a partir de variables explicativas, ésta no es realmente la aplicación que se le suele dar en investigación. Los usos que con mayor frecuencia se pueden encontrar en las publicaciones son los siguientes:

- Identificación de variables explicativas: ayuda a crear un modelo donde se seleccionen las variables que puedan influir en la respuesta, descartando aquellas que no aporten información.
- Detección de interacciones: entre variables independientes que afectan a la variable respuesta. Un ejemplo de interacción clásico es el de estudiar la respuesta de un paciente al alcohol y a un barbitúrico, y observar que cuando se ingieren ambos, el efecto es mucho mayor del esperado como suma de los dos.
- Identificación de variables confusoras: Es un problema difícil el de su detección, pero de interés en investigación no experimental, puesto que el investigador normalmente no tiene control sobre las variables explicativas (independientes).

4.2.7 Modelo de Regresión Lineal Múltiple (MRLM)

El modelo lineal de regresión múltiple viene dado por la expresión:

$$Y = b_0 + b_1.X_1 + b_2.X_2 + b_3.X_3 + \dots + b_k.X_k + u \quad (\text{Ec.4.2})$$



Los coeficientes $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$ denotan la magnitud del efecto que las variables explicativas $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ tienen sobre la variable explicada Y . Estos coeficientes los calcula el programa estadístico empleado de modo que se minimicen los residuos. El coeficiente b_0 se denomina término constante (o independiente) del modelo. El término u se denomina término de error o perturbación del modelo.

Puesto que se dispone de un conjunto de T observaciones para cada una de las variables dependientes e independientes, el modelo anterior puede reescribirse de la forma:

$$Y = b_0 + b_1.X_{1t} + b_2.X_{2t} + b_3.X_{3t} + \dots + b_k.X_{kt} + u_t \quad t=1,2,3,\dots,T \quad (\text{Ec.4.3})$$

El modelo teórico anterior se puede representar en notación matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{1,1} & X_{2,1} \dots X_{k,1} \\ 1 & X_{1,2} & X_{2,2} \dots X_{k,2} \\ 1 & X_{1,3} & X_{2,3} \dots X_{k,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1,T} & x_{2,T} \dots X_{k,T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_t \end{bmatrix} \quad (\text{Ec.4.4})$$

Y por consiguiente, el modelo original o real se puede abreviar de la forma:

$$Y = XB + u \quad (\text{Ec.4.5})$$

Y el modelo estimado será:

$$\hat{Y} = X\hat{B} + \hat{u} \quad (\text{Ec.4.6})$$

Donde \hat{B} es un vector de estimaciones de los coeficientes y \hat{u} es el residuo que por definición es la diferencia entre los verdaderos valores de la variable Y_t , es decir,

$$\hat{u}_t = Y_t - \hat{Y}_t \quad \text{para todo } t \quad (\text{Ec.4.7})$$

4.2.8 Requisitos y limitaciones del MRLM

Para poder utilizar la técnica de regresión múltiple existen ciertos requisitos o hipótesis que necesariamente se han de satisfacer. Existen cuatro grupos de hipótesis siguientes: las

hipótesis sobre las variables explicativas, las hipótesis sobre el término de perturbación, las hipótesis sobre la variable de respuesta, y las hipótesis sobre los parámetros del modelo.

Hipótesis sobre las variables explicativas

- Las variables $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ son **deterministas** (no son variables aleatorias), ya que su valor es un valor constante que proviene de una muestra tomada. Por otro lado, si se pretende ajustar unas pocas observaciones usando muchas variables, muy probablemente se consiga una aproximación muy artificial, y además muy sensible a los valores observados. De esta manera, la inclusión de una nueva observación puede cambiar completamente el valor de los coeficientes del modelo. Para que esto no ocurra, se suele recomendar incluir al menos 20 observaciones por cada variable independiente que se desee estimar en el modelo.
- Las variables independientes son linealmente independientes, es decir, no existe relación lineal exacta entre ellas. Esta hipótesis se denomina hipótesis de **independencia**, y cuando no se cumple, se dice que el modelo presenta **multicolinealidad**. En la práctica, la colinealidad se detecta cuando dos variables independientes están estrechamente relacionadas (por ejemplo el consumo de refrescos y temperatura ambiente) y ambas son incluidas en el modelo, por lo que ninguna de las dos será considerada significativa. Si se incluye únicamente una de ellas se evitaría este hecho.

Hay diferentes técnicas para detectar la colinealidad pero requiere metodologías muy sofisticadas. La técnica más empleada para resolver este problema es la de examinar los coeficientes del modelo para observar si se vuelven inestables al introducir una nueva variable. Si es así, probablemente existe colinealidad entre la nueva variable y las anteriores.

Hipótesis sobre el término de perturbación o error (u)

- **Aleatoriedad:** La variable u (término de error o perturbación) es una variable aleatoria con esperanza nula, es decir, su valor esperado es cero:

$$E[u_i] = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, t$$

- **Homoscedasticidad:** todos los términos de error tienen la misma varianza, es decir, tienen varianza constante (la varianza de u_t no depende de t):



$$Var[u_i] = Var[u_j] = \sigma^2 \quad \forall i \neq j$$

Por tanto, todos los términos de la diagonal principal de la matriz de varianzas y covarianzas serán iguales:

$$Var[u] = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\sigma^2 & \dots\dots \\ \dots\dots\dots\sigma^2 \end{bmatrix}$$

- **No Autocorrelación:** los errores son independientes unos de otros, por lo que la matriz de varianzas y covarianzas es una matriz diagonal.

$$Cov(u_i, u_j) = 0$$

- **Normalidad y equidistribución de los residuos:** como se ha explicado en el apartado 4.2.7, se denomina residuo a las diferencias entre los valores calculados por el modelo y los realmente observados en la variable dependiente Y. Para tener un buen modelo de regresión no es suficiente con que los residuos sean pequeños. La validez del modelo requiere que los mismos se distribuyan de modo normal y con la misma dispersión para cada combinación de valores de las variables independientes.

$$u = N(0, \sigma^2)$$

Esta condición es difícil de verificar en la práctica, puesto que para cada combinación de variables independientes se tiene normalmente ninguna o una respuesta. Lo que se suele hacer es examinar una serie de gráficos de residuos para observar que no existan tendencias entre el error y la variable dependiente o de respuesta Y. Por ejemplo, si al aumentar la respuesta aumentan los residuos o cualquier otro tipo de tendencias apreciables. De todos modos, es la experiencia del investigador la que al observar el gráfico de residuos decide o no utilizar el modelo.

Hipótesis sobre la variable respuesta

- **Linealidad:** Se debe garantizar que la variable respuesta dependa linealmente de las variables explicativas. Si la respuesta no es lineal, se debe introducir en el modelo componentes no lineales [32] (como incluir transformaciones no lineales de

las variables independientes en el modelo). Otro tipo de respuesta no lineal es la interacción. Para ello se ha de incluir en el modelo términos de interacción que equivalen a introducir nuevas variables explicativas que en realidad son el producto de dos o más de las variables independientes.

- **Aleatoriedad:** la variable Y es aleatoria, pues depende de la variable aleatoria u .

Hipótesis sobre los parámetros del modelo

- La única hipótesis que se realizará acerca de los parámetros del modelo es la hipótesis de permanencia estructural, lo cual quiere decir que los parámetros poblacionales, b_k , se mantienen constantes a lo largo de toda la muestra.

4.2.9 Estimación del MRLM

Estimar el modelo de Regresión Múltiple equivale a asignar valores numéricos a los parámetros desconocidos $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$ a partir de la información muestral disponible de las variables observables del modelo.

Los dos métodos de estimación más populares son:

- El método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO)
- El método de máxima verosimilitud (MV)

4.2.9.1 Estimación por mínimos cuadrados ordinarios (MCO)

El MCO consiste en minimizar la suma de cuadrados de los residuos, $u'u$ con respecto del vector de parámetros estimados, \hat{B}

La suma de cuadrados de residuos, también llamada SUMA RESIDUAL (SR), tiene por expresión:

$$SR = \hat{u}'\hat{u} = \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2 = \sum_{t=1}^T (Y_t - \hat{Y}_t)^2 \quad (\text{Ec.4.8})$$

Por lo tanto, el problema consiste en minimizar la suma de los cuadrados de los residuos $\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2$. De este problema se deduce la expresión de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) del Método de Regresión Lineal Múltiple (MRLM):



Criterio MCO:
$$\text{Min} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2 \quad (\text{Ec.4.9})$$

De las ecuaciones anteriores [4.4], [4.5], y [4.6] se deduce la siguiente expresión para calcular el vector de parámetros estimados:

$$\hat{B} = (X'.X)^{-1}.X'.Y \quad (\text{Ec.4.10})$$

Cuya varianza viene dada por:

$$\text{Var}[\hat{B}] = \sigma^2 (X'.X)^{-1} \quad (\text{Ec.4.11})$$

Y el estimador MCO de la varianza del término de perturbación es:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{u'.u}{n-k} \quad (\text{Ec.4.12})$$

Donde n es el número de observaciones y k es el número de elementos del vector \hat{B} .

Bajo las hipótesis de perturbaciones descritas en el apartado anterior, tanto el estimador MCO del vector \hat{B} como el estimador MCO de la varianza del término de error, $\hat{\sigma}_u^2$, cumplen una serie de propiedades que los convierten en insesgados (el valor esperado del estimador coincide con el valor del parámetro real), eficiente (de varianza mínima) y consistente.

El método de estimación por MCO consiste en asignar valores numéricos a los parámetros desconocidos de manera que la suma cuadrática de errores sea mínima y sólo requiere que la matriz $X'X$ sea invertible. A continuación se presenta un método de estimación alternativo, el método de máxima verosimilitud.

4.2.9.2 Estimación mediante el método de máxima verosimilitud (MV)

El Método de máxima verosimilitud (MV) propone resolver la estimación de los parámetros desconocidos con un estimador del valor que maximiza la probabilidad de obtener la muestra ya disponible.

El MV se basa en la distribución que sigue el término de error. A tales efectos, se suele suponer que las perturbaciones aleatorias siguen una distribución normal ya que es una aproximación cómoda y fácil de tratar.

El vector de parámetros estimados mediante el método de máxima verosimilitud tiene por expresión [33]:

$$\hat{B}_{MV} = (X'.X)^{-1}.X'.Y \quad (\text{Ec.4.13})$$

Y cuya varianza es la siguiente:

$$\text{Var}[\hat{B}_{MV}] = \sigma^2 (X'.X)^{-1} \quad (\text{Ec.4.14})$$

Además, el estimador MV de la varianza del término de perturbación es:

$$\hat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{u'.u}{n} \quad (\text{Ec.4.15})$$

Donde n es el número de observaciones y k es el número de elementos del vector \hat{B} .

Se observa que el estimador de MCO de B coincide con el de MV, por lo que éste último tendrá las mismas propiedades que el anterior: será lineal, insesgado, óptimo y consistente.

4.2.10 Medidas de bondad del ajuste

Las estimaciones mediante MCO y MV por sí solas no permiten evaluar la calidad de ajuste del modelo. Se necesita por lo tanto algún indicador que proporcione una medida de la calidad del ajuste.

Este indicador encargado de proporcionar una medida de la bondad del ajuste del modelo es el Coeficiente de Determinación.

4.2.11 Definición del Coeficiente de Determinación Corregido (\bar{R}^2)

Se denomina coeficiente de determinación R^2 al coeficiente que indica el porcentaje del ajuste que se ha conseguido con el modelo lineal, es decir el porcentaje de la variación de Y que se explica a través del modelo lineal que se ha estimado, es decir a través del comportamiento de X.



Cuanto mayor sea R^2 mejor es el modelo para predecir el comportamiento de la variable Y .

También se puede entender este coeficiente de determinación como el porcentaje de varianza explicada por la recta de regresión y su valor siempre estará entre 0 y 1.

De este modo, el valor del Coeficiente de Determinación (R^2) es igual al cuadrado del coeficiente de correlación (r):

$$R^2 = r^2 \quad (\text{Ec.4.16})$$

Este coeficiente de bondad de ajuste es una medida de la proximidad o de ajuste de la recta de regresión a la nube de puntos.

Así mismo, $1 - R^2$ indica el porcentaje de las variaciones que el modelo de regresión no es capaz de explicar, es decir, es la varianza de los residuos (varianza inexplorada).

La expresión del coeficiente de determinación R^2 también se puede encontrar en la literatura como:

$$R^2 = 1 - \frac{SCE}{SCT} \quad (\text{Ec.4.17})$$

Donde SCE es la suma de cuadrados de los errores, correspondiente a la parte que el modelo no puede explicar y que viene determinada por:

$$SCE = u'u = \sum_{i=1}^n u_i^2 = Y'Y - \hat{B}'X'Y = Y'Y - \hat{Y}'Y = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i^2 \quad (\text{Ec.4.18})$$

SCT representa la suma de cuadrados totales, es decir, la suma de cuadrados de las desviaciones respecto de la media aritmética, cuya expresión es:

$$SCT = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \quad (\text{Ec.4.19})$$

Por otro lado, la suma de cuadrados de regresión, SCR viene definida por:

$$SCR = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \quad (\text{Ec.4.20})$$

Y por consiguiente, la variable endógena (SCT) puede descomponerse en dos partes: la parte que se puede explicar mediante el modelo especificado (SCR) y la parte que no se puede explicar, la suma de cuadrados de los errores (SCE) mediante la expresión:

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n u_i^2 \quad (\text{Ec.4.21})$$

Si el modelo tiene término independiente, entonces se cumple la igualdad SCT=SCR+SCE y el coeficiente de determinación podrá expresarse de la siguiente manera alternativa:

$$R^2 = \frac{SCR}{SCT} \quad (\text{Ec.4.22})$$

En la práctica, el uso de R^2 presenta algunas limitaciones a la hora de comparar varios modelos desde la perspectiva de bondad de ajuste. Cuantas más variables explicativas se quieran añadir al modelo, mayor será el coeficiente de determinación, pues la SCR disminuye conforme aumenta el número de variables explicativas. De este modo, cuando se desea llevar a cabo un análisis comparativo entre varios modelos, se utiliza R^2 corregido:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k} (1 - R^2) \quad (\text{Ec.4.23})$$

Este estadístico es inmune ante la incorporación de variables adicionales que pueden afectar directamente al modelo aumentando R^2 o bien el efecto opuesto que surge al descontar un mayor número de variables explicativas, $\frac{n-1}{n-k}$ [33].

El estadístico \bar{R}^2 se puede considerar como una buena medida de la calidad de la regresión. El modelo será tanto mejor cuanto mayor sea el coeficiente de determinación corregido \bar{R}^2 .



4.2.12 Significación de los parámetros del modelo

La realización de todo estudio estadístico de regresión pretende poner de manifiesto al final del mismo si existe o no asociación entre diferentes variables. Esta asociación puede ser el resultado de que realmente exista la asociación indicada o bien que ésta se produzca por azar, ya sea por la presencia de sesgos o debido a la presencia de variables de confusión.

En estadística, un resultado se denomina **estadísticamente significativo** cuando no es probable que haya sido debido al azar. Una "diferencia estadísticamente significativa" solamente significa que hay evidencias estadísticas de que hay una diferencia entre las variables estudiadas. No significa que la diferencia sea grande, importante, o significativa en el sentido estricto de la palabra, sólo indica que hay diferencias.

El nivel de significación de un test es un concepto estadístico asociado a la verificación de una hipótesis. En pocas palabras, se define como la probabilidad de tomar la decisión de rechazar la hipótesis nula (H_0) cuando ésta es verdadera (decisión conocida como Error tipo I, o "falso positivo"). La decisión se toma a menudo utilizando el valor P (o p-valor): si el valor P es inferior al nivel de significación, entonces la hipótesis nula es rechazada. Cuanto menor sea el valor P, más significativo será el resultado.

La H_0 (hipótesis nula) representa la afirmación de que no hay asociación entre las dos variables estudiadas y la H_1 (hipótesis alternativa) afirma que hay algún grado de relación o asociación entre las dos variables.

En concreto, para contrastar las hipótesis de significancia individual se establece:

$$H_0: b_k=0$$

$$H_A: b_k \neq 0$$

Y para realizar el test de significancia se utiliza el estadístico **t-Student**:

$$t_j = \frac{\hat{b}_j}{\sqrt{\hat{\sigma}_u^2 \cdot a_{jj}}} \approx t_{n-k} \quad (\text{Ec.4.24})$$

Donde $\sqrt{\hat{\sigma}_u^2 \cdot a_{jj}}$ es el error estándar estimado de \hat{b}_j , y a_{jj} es el j-ésimo elemento de la diagonal principal de la matriz $(X'.X)^{-1}$.

Dado un nivel de significación α , las tablas de distribuciones nos proporcionan la cantidad $t_{n-k, \alpha/2}$ que es el valor asociado a una t-Student con $n-k$ grados de libertad que deja a su derecha un área de $\alpha/2$ (o, equivalentemente, deja a su izquierda un área de $1 - \alpha/2$).

La regla de decisión que se utiliza para determinar si el parámetro asociado a la variable X_j es individualmente significativo o no es la siguiente:

- Si $|t_j| \geq t_{n-k, \alpha/2}$, el estadístico cae fuera de la región de aceptación, por lo que se rechaza la hipótesis nula. En conclusión, el parámetro es significativamente diferente de cero.
- Si $|t_j| < t_{n-k, \alpha/2}$, el estadístico cae dentro de la región de aceptación, por lo que no se puede rechazar la hipótesis nula. Por tanto, el parámetro no es individualmente significativo.

La decisión se toma a menudo utilizando el valor P (o p-valor): si el valor P es inferior al nivel de significación, entonces la hipótesis nula se rechaza. Cuanto menor sea el valor P, más significativo será el resultado.

En otros términos, el nivel de significancia de un contraste de hipótesis es una probabilidad P tal que la probabilidad de tomar la decisión de rechazar la hipótesis nula (cuando ésta es verdadera) no es mayor que P.

Son comunes los niveles de significancia del 0,05, 0,01 y 0,1. Si un contraste de hipótesis proporciona un valor P inferior a α , la hipótesis nula es rechazada, siendo tal resultado denominado 'estadísticamente significativo'. Cuanto menor sea el nivel de significancia, más fuerte será la evidencia de que un hecho no se debe a una mera coincidencia (al azar).

En cambio, si se desea contrastar la significación conjunta, las hipótesis se especifican de la siguiente manera:

$$H_0: b_2=b_3=\dots=b_k=0$$

$$H_A: \text{No } H_0$$

En este caso, para realizar el test se utiliza el estadístico **F de Snedecor**:

$$F_0 = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-k}{n-1} \approx F_{k-1, n-k} \quad (\text{Ec.4.25})$$



El estadístico se distribuye bajo la hipótesis nula con una distribución F de Snedecor con $k-1$ grado de libertad en el numerador y $n-k$ grados de libertad en el denominador. La regla de decisión utilizada para contrastar la significación global del modelo es la siguiente:

- Si $F_0 \geq F_{k-1, N-k; \alpha}$, el estadístico de contraste cae fuera de la región de aceptación, con lo que se rechaza la hipótesis nula. Por lo tanto, el modelo es globalmente significativo.
- Si $F_0 < F_{k-1, N-k; \alpha}$, el estadístico de contraste cae dentro de la región de aceptación, de modo que en este caso la hipótesis nula no se rechaza. En consecuencia, se puede afirmar que el modelo no es globalmente significativo.

CAPÍTULO 5

CÁLCULO DE LA CARGA CRÍTICA ELÁSTICA MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (FEM)

5.1 Introducción

En este capítulo se presentan los cálculos de la carga crítica elástica (P_{cr}) de los perfiles sometidos a compresión centrada mediante el método de los elementos finitos. Para la realización de los cálculos se ha utilizado el software comercial ANSYS 12.0 [34].

Ansyp dispone de diferentes métodos matemáticos para la resolución de las ecuaciones numéricas de equilibrio necesarias en los análisis de elementos finitos que se plantean. De este modo, si se realiza un análisis de pandeo lineal, el método más utilizado es el de Pandeo de Autovalores (o valores propios), apropiado para obtener una primera carga crítica de forma rápida. Por otro lado, si se desea realizar un análisis no lineal, el método de Newton-Raphson es el más empleado (la carga crítica descenderá al introducir no-linealidades en el análisis).

Un análisis no lineal de elementos finitos es una herramienta muy valiosa para predecir el comportamiento de perfiles estructurales en su Estado Límite Último (*ELU*). El principal inconveniente que presentan estas predicciones numéricas es su sensibilidad a las hipótesis de modelización. Este estudio contempla únicamente los cálculos de carga crítica elástica para los análisis lineales de pandeo. Para estudios posteriores, se propone la incorporación de análisis no lineales.

Las cargas elásticas de pandeo de los perfiles analizados se calculan teniendo en cuenta el pandeo del perfil en una semionda, tal y como se realiza al aplicar el *DSM* (como se ha explicado en el capítulo 3) para garantizar que las cargas resultantes calculadas tanto en ANSYS como en CUFSM se determinan en las mismas condiciones.



En este sentido y para realizar una serie de cálculos previos con el objetivo de observar cómo evoluciona el espesor reducido y la carga crítica elástica con la longitud del perfil, se propone hacer un barrido de longitudes de estudio comprendidas entre 100mm y 2500mm.

En los siguientes apartados se explicarán los pasos más importantes en la preparación de los cálculo que son: el modelado y mallado de los perfiles, las condiciones de contorno impuestas así como las cargas aplicadas, y la selección del método de cálculo.

Así mismo, todos los pasos que se explican en este capítulo, tanto los de pre-proceso, los de cálculo y los de post-proceso han sido automatizados mediante rutinas en ANSYS. Estas rutinas, llamadas macros, quedan a disposición del lector que puede consultarlas en el Anexo D de este proyecto.

En total, se han realizado más de 1590 cálculos con ANSYS (330 correspondientes a los cálculos previos, 315 para el modo local, 315 cálculos para el modo distorsional y 630 para el modo global) además de los numerosos cálculos desechados realizados en segundo plano.

5.2 Modelado de los perfiles

Las siguientes figura y tabla, presentada en el capítulo 1 de este proyecto, son un resumen de las dimensiones principales de la sección de los perfiles a estudiar expresadas en mm:

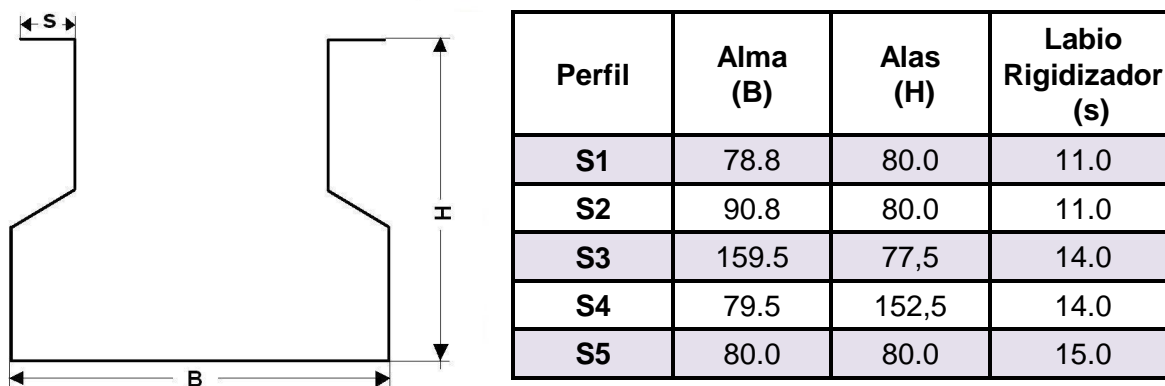


Figura 5.1-Dimensiones principales de la sección y Tabla 5.1-Dimensiones principales en mm de la sección de los puntales estudiados.

Como ya se comentó en el apartado 2.3 del capítulo 2, las geometrías de los perfiles originales han sido modificadas atendiendo a ciertas consideraciones para simplificar los modelos de espesor reducido que se calibrarán con los cálculos obtenidos.

Para más detalle sobre la geometría de la sección del perfil el lector puede consultar el Anexo A.

5.3 Mallado de los perfiles

La selección de un elemento sólido adecuado para el modelado es un tema que aún se está investigando. Según [25], el elemento a escoger en el modelado depende fundamentalmente del tipo de análisis, geometría y densidad de la malla del perfil. Debido a que los perfiles que se analizarán no presentan radios de curvatura en las esquinas, se mallará el perfil con el elemento finito tipo SHELL63 [16]. De acuerdo con [25], cuando se trata de un cálculo lineal, SHELL63 es el elemento recomendado para modelar perfiles de chapa delgada.

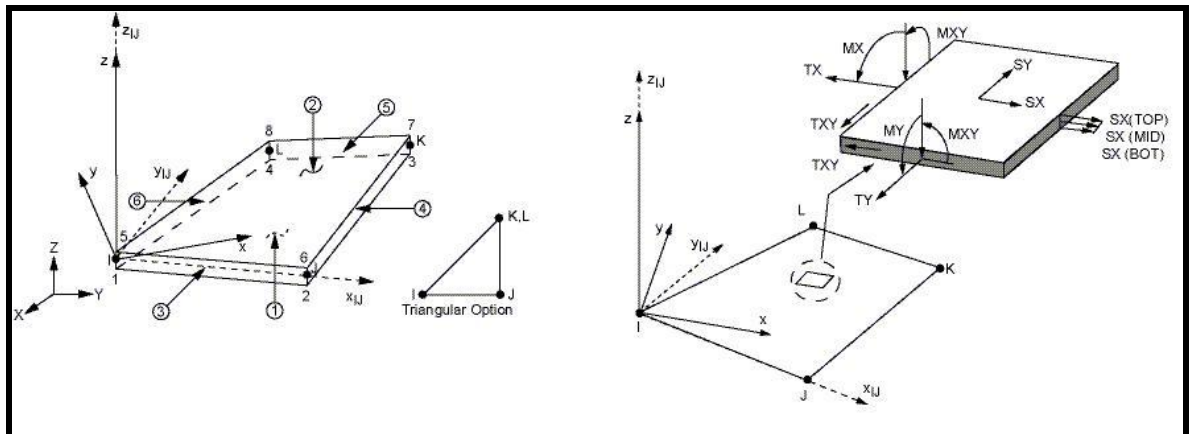


Figura 5.2-Elemento SHELL63 de ANSYS.

Fuente: Help de ANSYS 12.0 [26].

El elemento SHELL63 se caracteriza por tener seis grados de libertad en cada uno de sus cuatro nodos: translación en las direcciones nodales x , y , z y rotación respecto de los ejes nodales x , y , z . El elemento puede someterse tanto a esfuerzos de flexión como a esfuerzos normales, y por tanto es válido para esfuerzos de placa así como también para esfuerzos de membrana.

Para garantizar la selección de este elemento en el mallado, se ha de tener en cuenta que en el caso concreto de pandeo distorsional, el labio rigidizador se somete a flexión y por ello



necesita al menos 4 elementos lineales para proporcionar una precisión razonable en los resultados del análisis. También hay que tener en cuenta que este elemento lineal se bloquea cuando se utilizan menos de cinco elementos por media onda de pandeo.

Por todo esto, para el tamaño del elemento (puntos de integración) se considera que un tamaño de 5mm es suficiente y adecuado para los análisis lineales de pandeo.

Finalmente, puesto que el perfil presenta zonas más complejas que otras, por ejemplo en las zonas próximas a las perforaciones, se debe escoger un procedimiento de mallado adecuado a tal efecto. Para ello, el procedimiento seguido ha sido el de tipo mixto (*mixed*) de manera que las zonas más regulares se han mallado con cuadriláteros (*quads*) mientras que las zonas que presenta mayor irregularidad se han mallado con tetraedros (*tetras*).

La figura 5.3 muestra un ejemplo de un perfil mallado con elemento SHELL63.

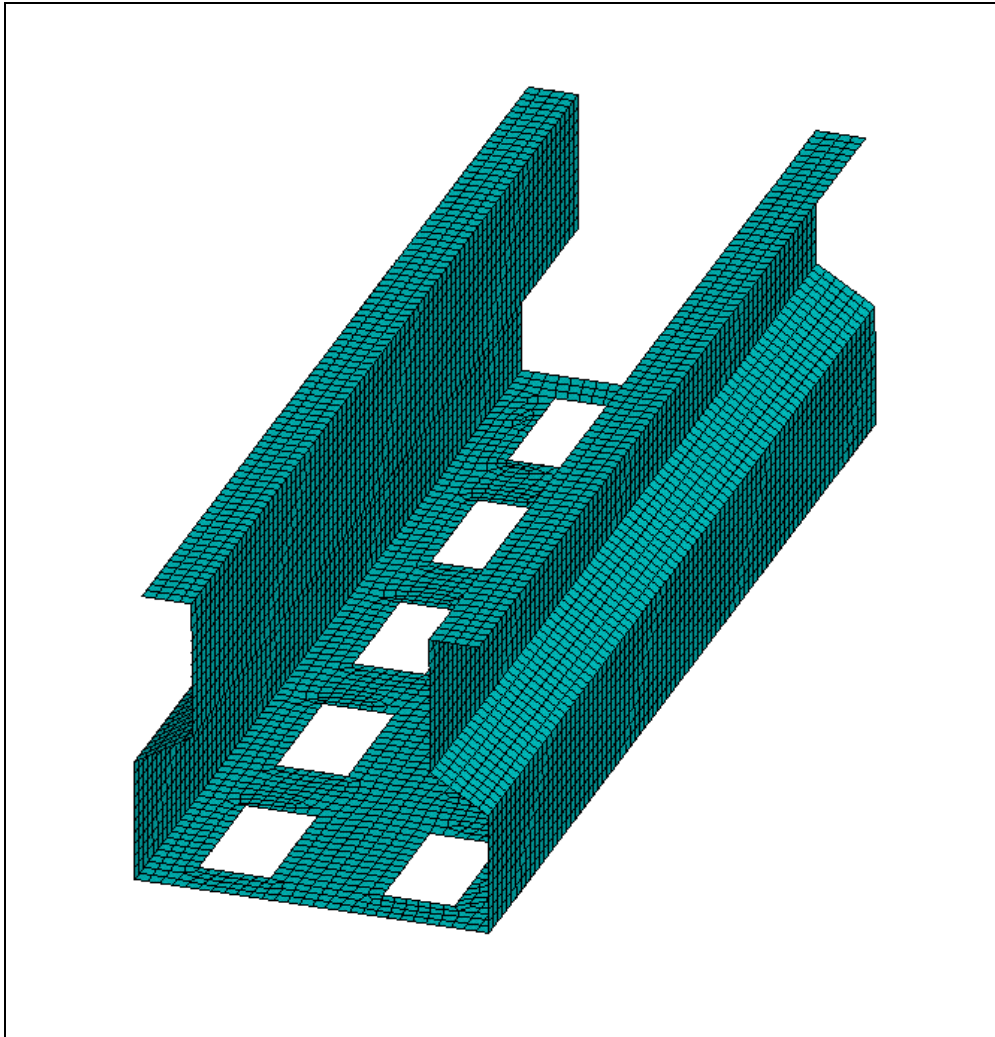


Figura 5.3-Ejemplo de mallado con elemento lineal tipo SHELL63 para el perfil S1.

5.4 Condiciones de contorno y cargas aplicadas

Las cargas elásticas de pandeo de los perfiles analizados se calculan teniendo en cuenta el pandeo del perfil en una semionda, tal y como se realiza al aplicar el *DSM*. Es necesario garantizar que las cargas resultantes calculadas tanto en ANSYS como en CUFSM se determinan en las mismas condiciones. Esta es la razón por la que se introducen restricciones adicionales en la dirección longitudinal del modelo de elementos finitos tal y como se muestra en la Figura 5.4.

La malla de elementos finitos se ve obligada a deformar en forma sinusoidal pura, que es la forma considerada en la versión CUFSM 3.12 [6]. (El estudio comenzó antes de que la versión 4.03 estuviera disponible).

En ANSYS, estas restricciones adicionales se pueden introducir a través de ecuaciones de restricción.

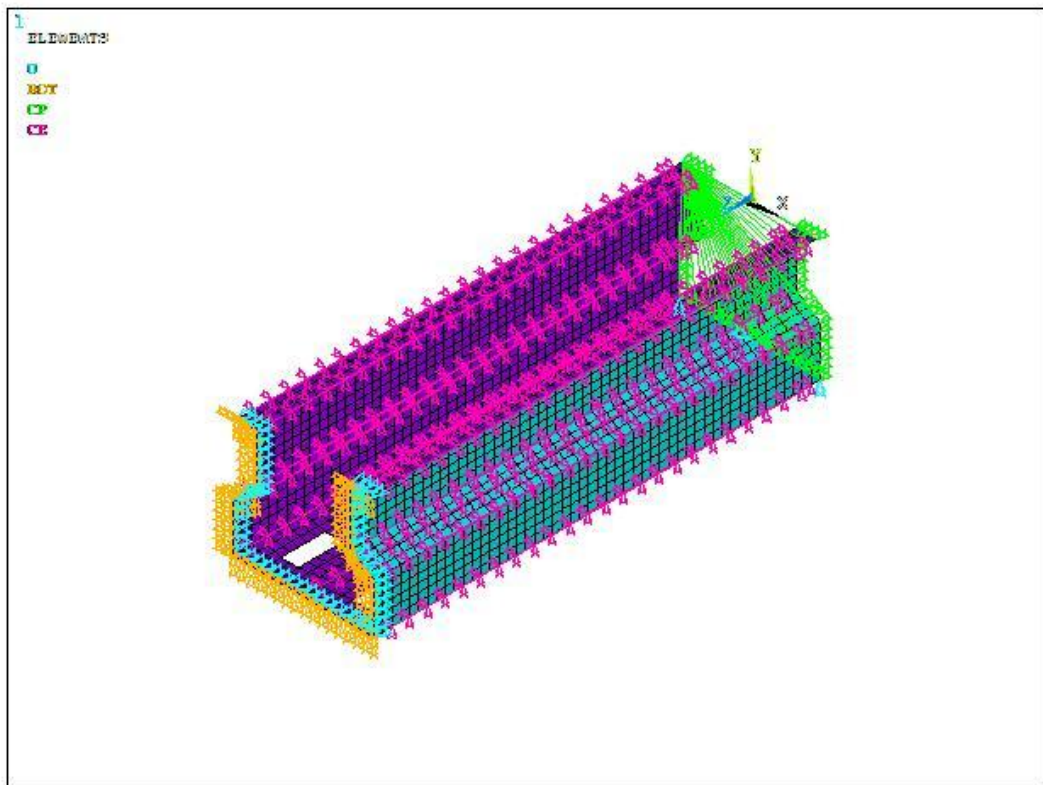


Figura 5.4-Condiciones de contorno para el modelo de elementos finitos de sección S1.

Para realizar los cálculos lineales de pandeo el perfil se ha cargado mediante la imposición de un desplazamiento en la dirección longitudinal en uno de sus extremos.



5.5 Análisis Lineal. Método de Pandeo de Valores propios

5.5.1 Introducción

Antes de presentar los resultados de los cálculos previos es importante explicar el método de cálculo que se ha seguido para realizar los cálculos del análisis lineal.

El análisis de pandeo de valores propios es una valiosa herramienta para predecir la carga crítica de pandeo de una estructura lineal y elástica, es decir, predice el punto de bifurcación en la curva carga-desplazamiento de la estructura.

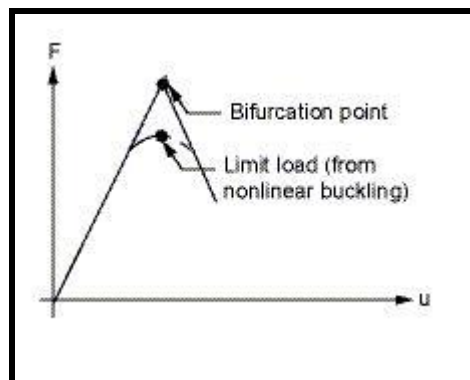


Figura 5.5-Curva de pandeo lineal (Método de Pandeo Lineal de Valores Propios).

Fuente: Help de ANSYS 12.0 [26].

Ansys realiza el análisis de pandeo de valores propios empleando un modelo linealizado de estabilidad elástica. El punto de bifurcación corresponde en este caso a un crecimiento no acotado de un nuevo patrón de deformación.

En todo cálculo de pandeo de cualquier estructura se ha de tener en cuenta el efecto de los esfuerzos normales (*stress stiffening*). Este es el fenómeno por el cual las fuerzas de membrana (axiales) influyen en la rigidez a flexión. Un ejemplo típico de este fenómeno es el de una cuerda de guitarra que se hace más rígida al tensarla (su frecuencia natural de vibración es más alta) pero una carga axial de compresión reduce la rigidez a flexión haciendo que la estructura se haga inestable al alcanzar cierta carga: la carga crítica de pandeo.

Ansys tiene en cuenta este fenómeno de segundo orden (el efecto de las tensiones normales) al realizar el análisis de pandeo de valores propios incluyendo un cálculo tensional previo para incluir los efectos de las tensiones de membranas en la matriz de

rigidez geométrica (*stress stiffness matrix*) que se suma a la obtenida con la teoría de primer orden:

$$K_{ss} = K + K_{\sigma} \quad (\text{Ec. 5.1})$$

La matriz de rigidez geométrica depende por tanto de la geometría del elemento, los desplazamientos y los valores de los esfuerzos de membrana.

5.5.2 Proceso de cálculo de Pandeo Lineal de Valores propios

Ansys formula el análisis de pandeo lineal mediante la solución de un problema de valores y vectores propios según el siguiente proceso:

1. En primer lugar, se carga la estructura hasta un nivel arbitrario de referencia de cargas exteriores, F_{ref} . Seguidamente se calculan los esfuerzos de membrana en los elementos mediante un análisis estático lineal:

$$K.D_{ref} = F_{ref} \quad (\text{Ec.5.2})$$

De la ecuación 6.2 se calculan los desplazamientos D_{ref} y posteriormente se calculan las tensiones y los esfuerzos correspondientes al nivel de carga F_{ref} .

Para calcular la matriz de rigidez geométrica $K_{\sigma,ref}$ en función del nivel de carga se hace el análisis estático mencionado anteriormente. Para ello se introduce en el programa el código que se muestra en la siguiente figura:

```
/SOLU
ANTYPE,STATIC
PSTRES,ON
      ! Aplicar cargas
SOLVE
FINISH
```

Figura 5.7-Código en Ansys para el cálculo previo de la matriz de rigidez geométrica.

2. Para otro nivel de cargas la ecuación 5.2 se reescribe de la siguiente manera:



$$F = \lambda.F_{ref} \Rightarrow K_{\sigma} = \lambda.K_{\sigma,ref} \quad (\text{Ec.5.3})$$

Por tratarse de un análisis lineal, al multiplicar las cargas por el factor λ también se multiplican las tensiones por el mismo factor sin cambiar la distribución de tensiones.

Los desplazamientos para el nuevo valor de carga son:

$$(K + \lambda.K_{\sigma,ref}).D_{\lambda} = \lambda.F_{ref} \quad (\text{Ec.5.4})$$

3. Cuando se aplica una perturbación sobre la carga δF , se produce un movimiento δD . El pandeo (bifurcación del equilibrio) sucede cuando se produce un δD a pesar de que $\delta F=0$.

$$(K + \lambda.K_{\sigma,ref}).(D_{\lambda} + \delta D) = \lambda.F_{ref} \quad (\text{Ec.5.5})$$

Sustituyendo (5.4) en (5.5) se obtiene:

$$(K + \lambda.K_{\sigma,ref}).\delta D = 0 \quad (\text{Ec.5.6})$$

Esta ecuación es la que determina los valores propios de pandeo al realizar el análisis lineal. El menor de los valores propios proporciona la carga crítica de pandeo λ_{crit} . El modo de pandeo que proporciona Ansys es el vector propio asociado a su correspondiente valor propio.



Cuando se calculan las tensiones como resultado del análisis se deben interpretar como una distribución relativa de tensiones y no directamente como el estado tensional.

Para la obtención de los valores propios necesarios Ansys proporciona tres procedimientos básicos que son: el método reducido (Reduced), el método del sub-espacio (Subspace) y el método de Block Lanczos(Block Lanczos). El lector puede consultar todos los detalles referentes a estos métodos en el Anexo B.





5.5.3 Cálculos previos con Ansys





Como ya se ha comentado, los cálculos que a continuación se presentan se han realizado mediante un análisis lineal de pandeo de valores propios con Ansys. Para garantizar que las cargas críticas de pandeo se calculan en las mismas condiciones tanto en Ansys como en CUFSM (Capítulo 6 de este proyecto), en Ansys se fuerza al perfil analizado a pandear en una semionda, del mismo modo que se realiza cuando se aplica el *DSM*. En esta primera serie de cálculos y debido a que aparentemente se desconoce la evolución del espesor reducido en función de la longitud del puntal, se propone realizar un barrido de cálculos de carga crítica elástica para longitudes del perfil comprendidas entre 100mm y 1500mm con un salto de 100mm.

Con el objetivo de presentar una base de datos considerable para poder tomar decisiones a partir de la misma, se propone realizar un estudio previo del comportamiento de la carga crítica elástica de los tres primeros perfiles, (S1, S2 y S3) en función de la longitud del perfil. A continuación se presentan los resultados obtenidos para los primeros cinco tipos de perforaciones del patrón de perforaciones presentado en el apartado 1.3 del capítulo 1. El lector puede consultar los resultados correspondientes al resto de perforaciones en el Anexo E.





SECCIÓN	LONGITUD (mm)	Carga crítica P_{cr} (N)	MODO PANDEO ANSYS	SECCIÓN	LONGITUD (mm)	Carga crítica P_{cr} (N)	MODO PANDEO ANSYS
 S1 PERFORACIÓN 30,5x16mm	100	269387	L+D	 S1 PERFORACIÓN 27,5x12,5mm	100	254183	L+D
	200	379013	D+L		200	375627	D+L
	300	248991	D		300	241941	D
	400	174768	D		400	168202	D
	500	145557	D		500	138564	D
	600	138860	D		600	130601	D
	700	141081	D		700	133642	D
	800	131800	D+G		800	125157	G+D
	900	119825	G+D		900	114216	G+D
	1000	106796	G+D		1000	102192	G+D
	1100	94324	G+D		1100	90511	G+D
	1200	83110	G+D		1200	79918	G+D
	1300	73380	G+D		1300	70660	G+D
	1400	65114	G+D		1400	62735	G+D
	1500	58042	G+D		1500	55977	G



SECCIÓN	LONGITUD (mm)	Carga crítica Pcr (N)	MODO PANDEO ANSYS	SECCIÓN	LONGITUD (mm)	Carga crítica Pcr (N)	MODO PANDEO ANSYS
 <div> S1 PERFORACIÓN 25x10 mm </div>	100	274543	L+D	 <div> S1 PERFORACIÓN 22,5x7,5 mm </div>	100	278719	L+D
	200	388994	D+L		200	394180	D+L
	300	262708	D		300	270873	D
	400	187554	D		400	195239	D
	500	159638	D		500	168131	D
	600	155705	D		600	165927	D
	700	154598	D		700	162033	D+G
	800	143929	G+D		800	150535	G+D
	900	130209	G+D		900	135813	G+D
	1000	115563	G+D		1000	120255	G+D
	1100	101704	G+D		1100	105630	G+D
	1200	89375	G+D		1200	92697	G+D
	1300	78761	G+D		1300	81602	G
	1400	69756	G		1400	72207	G
	1500	62133	G		1500	64273	G
SECCIÓN	LONGITUD (mm)	Carga crítica Pcr (N)	MODO PANDEO ANSYS	SECCIÓN	LONGITUD (mm)	Carga crítica Pcr (N)	MODO PANDEO ANSYS
 <div> S1 PERFORACIÓN 20x5 mm </div>	100	281605	L+D	 <div> S2 PERFORACIÓN 30,5x16 mm </div>	100	176127	L
	200	399072	D+L		200	286556	D+L
	300	278934	D		300	242468	D
	400	202852	D		400	173709	D
	500	176603	D		500	142597	D
	600	176168	D		600	132869	D
	700	169051	G+D		700	135415	D
	800	156766	G+D		800	145820	D
	900	141112	G+D		900	161688	D
	1000	124704	G+D		1000	155254	D
	1100	109375	G+D		1100	140006	G+D
	1200	95878	G+D		1200	124915	G+D
	1300	84339	G		1300	111088	G+D
	1400	74587	G		1400	98899	G+D
	1500	66371	G		1500	88333	G+D

SECCIÓN	LONGITUD (mm)	Carga crítica Pcr (N)	MODOS PANDEO ANSYS	SECCIÓN	LONGITUD (mm)	Carga crítica Pcr (N)	MODOS PANDEO ANSYS
 S2 PERFORACIÓN 27,5x12,5mm	100	176297	L	 S2 PERFORACIÓN 25x10 mm	100	176059	L
	200	282266	D+L		200	279996	D+L
	300	250217	D		300	256293	D+L
	400	182706	D		400	189652	D
	500	152610	D		500	160373	D
	600	144808	D		600	154104	D
	700	150002	D		700	161381	D
	800	163603	D		800	177504	D
	900	179819	D		900	187583	D
	1000	164795	G+D		1000	171360	G+D
	1100	147943	G+D		1100	153453	G+D
	1200	131562	G+D		1200	136215	G+D
	1300	116718	G+D		1300	120701	G+D
	1400	103722	G+D		1400	107183	G+D
	1500	92524	G		1500	95552	G
SECCIÓN	LONGITUD (mm)	Carga crítica Pcr (N)	MODOS PANDEO ANSYS	SECCIÓN	LONGITUD (mm)	Carga crítica Pcr (N)	MODOS PANDEO ANSYS
 S2 PERFORACIÓN 22,5x7,5 mm	100	175862	L	 S2 PERFORACIÓN 20x5 mm	100	175733	L
	200	278793	D+L		200	278576	D+L
	300	261797	D+L		300	267702	D+L
	400	195818	D		400	202278	D
	500	167222	D		500	174432	D
	600	162266	D		600	170909	D
	700	171379	D		700	181996	D
	800	189691	D		800	202679	D
	900	193938	G+D		900	200036	G+D
	1000	176774	G+D		1000	181915	G+D
	1100	158025	G+D		1100	162332	G+D
	1200	140100	G+D		1200	143744	G+D
	1300	124044	G+D		1300	127143	G+D
	1400	110081	G+D		1400	112756	G
	1500	98100	G		1500	100430	G



SECCIÓN	LONGITUD (mm)	Carga crítica Pcr (N)	MODO PANDEO ANSYS	SECCIÓN	LONGITUD (mm)	Carga crítica Pcr (N)	MODO PANDEO ANSYS
 <p>S3 PERFORACIÓN 30,5X16 mm</p>	100	167460	L	 <p>S3 PERFORACIÓN 27,5X12,5 mm</p>	100	173286	L
	200	221410	L+D		200	230511	L+D
	300	182113	D+L		300	190702	D+L
	400	130015	D		400	137569	D
	500	104747	D		500	112583	D
	600	95460	D		600	104494	D
	700	95448	D		700	106327	D
	800	101439	D		800	114647	D
	900	111657	D		900	127646	D
	1000	116439	D		1000	124913	G+D
	1100	103902	D+G		1100	111031	G+D
	1200	92175	G+D		1200	98151	G+D
	1300	81690	G+D		1300	86755	G+D
	1400	72580	G+D		1400	76916	G+D
	1500	64736	G+D		1500	68487	G
SECCIÓN	LONGITUD (mm)	Carga crítica Pcr (N)	MODO PANDEO ANSYS	SECCIÓN	LONGITUD (mm)	Carga crítica Pcr (N)	MODO PANDEO ANSYS
 <p>S3 PERFORACIÓN 25X10 mm</p>	100	177443	L	 <p>S3 PERFORACIÓN 22,5x7,5 mm</p>	100	181153	L
	200	236941	L+D		200	242669	L+D
	300	197001	D+L		300	202702	D+L
	400	143171	D		400	148239	D
	500	118450	D		500	123772	D
	600	111302	D		600	117500	D
	700	114561	D		700	122073	D
	800	124691	D		800	133861	D
	900	139801	D		900	150904	D
	1000	130767	D+G		1000	135728	G+D
	1100	115935	G+D		1100	120090	G+D
	1200	102273	G+D		1200	105770	G+D
	1300	90256	G+D		1300	93242	G+D
	1400	79929	G		1400	82499	G
	1500	71110	G		1500	73356	G


SECCIÓN	LONGITUD (mm)	Carga crítica P_{cr} (N)	MODO PANDEO ANSYS
 S3 PERFORACIÓN 20X5 mm	100	184965	L
	200	248406	L+D
	300	208533	D+L
	400	153399	D
	500	129220	D
	600	123907	D
	700	129891	D
	800	143456	D
	900	156893	D
	1000	140443	G+D
	1100	124041	G+D
	1200	109112	G+D
	1300	96102	G
	1400	84977	G
	1500	75524	G

Tabla 5.2-Cálculos de carga crítica elástica (P_{cr}) para las secciones S1, S2, y S3 y espesor de 1,8mm en el intervalo de longitudes de 100mm a 1500mm.

De la tabla anterior cabe destacar que Ansys no permite determinar el porcentaje exacto de participación de cada modo de pandeo y ha de ser la experiencia del analista la que determine mediante observación visual el tipo de inestabilidad modal que predomina. Así mismo, en esta primera fase de análisis se comprueba que, tal y como se ha comentado en el capítulo 2, para las longitudes más cortas (entre 100mm y 200mm) el modo predominante es el local, para longitudes intermedias (entre 400mm y 900mm) predomina el modo distorsional y finalmente, para las longitudes mayores (a partir de 1000mm) la participación del modo distorsional descendiendo progresivamente hasta que a partir de los 1300mm aproximadamente comienza a predominar el modo global.



Como era de esperar, esta evolución de la carga crítica frente a la longitud del perfil depende de la perforación del mismo. Lógicamente la carga crítica elástica es más baja cuanto mayor es el área perforada del perfil, tal y como muestra la figura 5.8. En ella puede observarse la evolución de la carga crítica (P_{cr}) en función de la longitud del perfil.

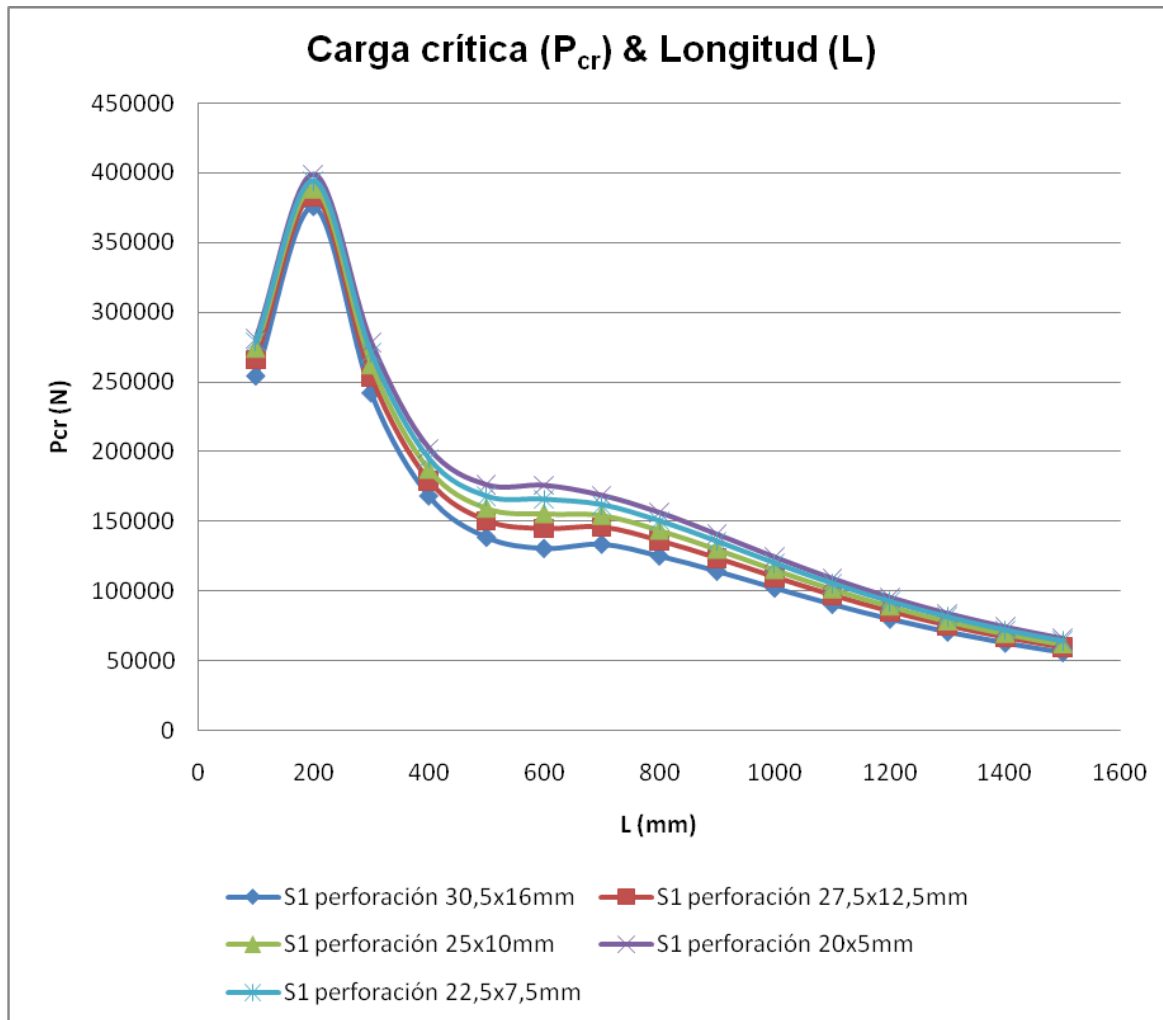


Figura 5.6-Ejemplo de evolución de la carga crítica en función de la longitud del perfil para la sección S1.

Llegados a este punto del proyecto, el siguiente paso es calcular con el *FSM* el espesor reducido necesario en las zonas perforadas del perfil para conseguir el valor de la carga crítica elástica calculada en este capítulo con el *FEM*.

Lo que aún está por determinar es la evolución del espesor reducido necesario en función de la longitud del perfil. Todo esto se desarrolla en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 6

CÁLCULO DE LA CARGA CRÍTICA ELÁSTICA MEDIANTE EL MÉTODO DE LA BANDA FINITA (FSM)

6.1 Introducción

En este capítulo se presentan los cálculos del espesor reducido necesario mediante el *FSM* en las zonas perforadas de los perfiles para obtener la carga crítica elástica calculada en el capítulo anterior con Ansys. Para la realización de los cálculos se ha utilizado el software de acceso libre CUFSM en su versión 3.12 [6].

CUFSM [10] fue desarrollado originalmente para apoyar la investigación sobre el comportamiento y el diseño de piezas de acero conformado en frío con una variedad de diferentes tipos de refuerzos longitudinales.

Este software permite explorar el comportamiento elástico de los modos de pandeo calculando la tensión de pandeo y los modos de pandeo de los perfiles de forma arbitraria, para perfiles de paredes delgadas simplemente apoyados; es decir, CUFSM permite determinar con precisión la tensión de pandeo elástico de una sección de pared delgada de sección transversal arbitraria.

CUFSM se basa en el método clásico de la banda finita que asume que la deformación longitudinal se produce en una semionda sinusoidal simple. Por tanto, CUFSM utiliza una media onda sinusoidal simple ($\sin(\frac{\pi \cdot x}{L})$) para las funciones de forma en la dirección longitudinal.

Los métodos de diseño que se utilizan tradicionalmente para la teoría de placas en estructuras a menudo ignoran la compatibilidad en las uniones de los elementos de sección y por lo general no ofrecen los medios para calcular una variedad de modos de pandeo importante.



En este sentido, CUFSM tiene la ventaja de que permite examinar y cuantificar todos los modos de pandeo elástico de una estructura. De esta forma, a través de este software se puede calcular la carga crítica (P_{cr}) y el momento crítico (M_{cr}) de pandeo elástico que a su vez son las variables de entrada (inputs) en el desarrollo del DSM tal y como se comentó en el capítulo 3.

Por otro lado, el método de las bandas finitas restringido o coaccionado, *cFSM* (*Constrained Finite Strip Method*) es una nueva extensión al método de las bandas finitas que proporciona la capacidad de descomponer las soluciones de estabilidad en los modos de deformación de pandeo (local, distorsional y global). La identificación modal permite que los resultados de una solución de banda finita convencional puedan ser juzgados en relación con la participación de las clases de pandeo, y así proporcionar una medida de la interacción del modo de pandeo. *cFSM* combinado con el método convencional de banda finita, puede proporcionar una poderosa herramienta para la comprensión de la estabilidad de la sección transversal de los perfiles de acero conformados en frío.

En los siguientes apartados se explicarán los pasos más importantes en la preparación de los cálculos con CUFSM son: el modelado y mallado de los perfiles, las condiciones de contorno impuestas así como las cargas aplicadas, y la selección del método de cálculo.

6.2 Modelado de los perfiles

A continuación se presenta el modelo de la sección transversal de los perfiles implementados en CUFSM. Es importante destacar que tanto las dimensiones de la sección como la posición de las perforaciones del alma del perfil permanecen invariantes respecto a los modelos utilizados en Ansys.

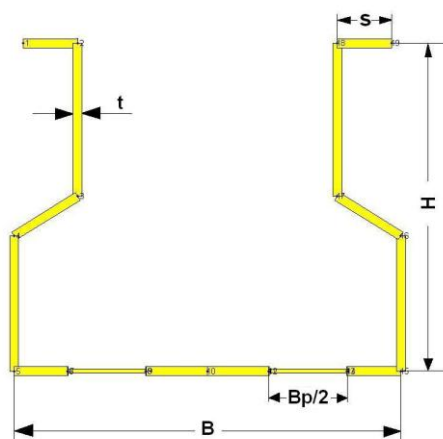


Figura 6.1-Modelo de la sección S1 implementada en CUFSM

Perfil	Alma (B)	Alas (H)	Labio Rigidizador (S)	Ancho perforado (Bp) *
S1	78.8	80.0	11.0	[16,12.5,10, 7.5, 5]
S2	90.8	80.0	11.0	[16,12.5,10,7.5, 5]
S3	159.5	77,5	14.0	[16,12.5,10,7.5, 5]
S4	79.5	152,5	14.0	[16,12.5,10,7.5, 5]
S5	80.0	80.0	15.0	[16,12.5,10,7.5, 5]

*El valor del ancho perforado (Bp) varía desde 5mm hasta 16mm para cada sección de acuerdo al patrón de perforaciones presentado en el apartado 1.3 del capítulo 1.

Tabla 6.1-Dimensiones principales en mm de la sección de los puntales de estudio.

6.3 Condiciones de contorno y cargas aplicadas

Respecto a las condiciones de contorno y las cargas aplicadas de los modelos en CUFSM cabe destacar dos observaciones:

En primer lugar, no se aplica tensión de compresión en las bandas perforadas tal y como muestra la Figura 6.2 .Se considera que la tensión relevante en relación con la capacidad de carga de la columna se transmite principalmente a través de la zona no perforada de la sección transversal.

En segundo lugar, el análisis de pandeo mediante el *FSM* estándar se realiza sin ningún tipo de restricción de modo (es decir, la opción cFSM del programa permanece apagada).

Todos los modelos están simplemente apoyados en los extremos debido a la elección de la función de forma en el método de la banda finita (*FSM*).



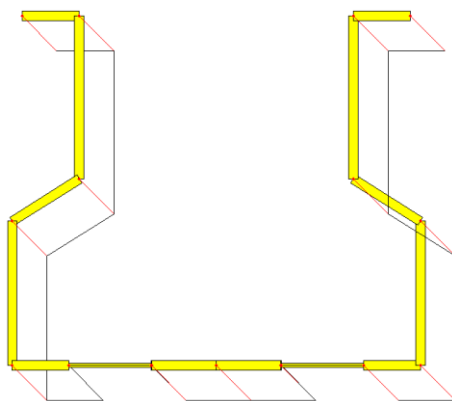








Figura 6.2-Diagrama de tensiones consideradas en el modelo de CUFSM.





6.4 Cálculos previos de espesor reducido con CUFSM





La tabla siguiente muestra los resultados obtenidos en CUFSM mediante iteración del espesor reducido hasta equilibrar la carga crítica elástica de pandeo calculada anteriormente con Ansys.

SECCIÓN	LONGITUD (mm)	CARGA CRÍTICA P_{cr} (N)	Espesor reducido t_r (mm)	SECCIÓN	LONGITUD (mm)	CARGA CRÍTICA P_{cr} (N)	Espesor reducido t_r (mm)
 S1 PERFORACIÓN 30,5x16 mm	100	269387	0,853	 S1 PERFORACIÓN 27,5x12,5 mm	100	254183	0,812
	200	379013	0,810		200	375627	0,814
	300	248991	0,960		300	241941	1,030
	400	174768	1,090		400	168202	1,140
	500	145557	1,130		500	138564	1,180
	600	138860	1,150		600	130601	1,195
	700	141081	1,145		700	133642	1,145
	800	131800	1,015		800	125157	1,060
	900	119825	0,980		900	114216	1,020
	1000	106796	0,930		1000	102192	0,980
	1100	94324	0,880		1100	90511	0,935
	1200	83110	0,830		1200	79918	0,890
	1300	73380	0,790		1300	70660	0,840
	1400	65114	0,740		1400	62735	0,805
	1500	58042	0,705		1500	55977	0,760

SECCIÓN	LONGITUD (mm)	CARGA CRÍTICA Pcr (N)	Espesor reducido tr (mm)	SECCIÓN	LONGITUD (mm)	CARGA CRÍTICA Pcr (N)	Espesor reducido tr (mm)
 S1 PERFORACIÓN 25x10 mm	100	274543	0,780	 S1 PERFORACIÓN 22,5x7,5mm	100	278719	0,715
	200	388994	0,830		200	394180	0,835
	300	262708	1,070		300	270873	1,080
	400	187554	1,180		400	195239	1,200
	500	159638	1,220		500	168131	1,245
	600	155705	1,238		600	165927	1,260
	700	154598	1,160		700	162033	1,205
	800	143929	1,130		800	150535	1,180
	900	130209	1,105		900	135813	1,153
	1000	115563	1,050		1000	120255	1,112
	1100	101704	1,010		1100	105630	1,070
	1200	89375	0,970		1200	92697	1,030
	1300	78761	0,935		1300	81602	1,010
	1400	69756	0,890		1400	72207	0,980
	1500	62133	0,774		1500	64273	0,955
SECCIÓN	LONGITUD (mm)	CARGA CRÍTICA Pcr (N)	Espesor reducido tr (mm)	SECCIÓN	LONGITUD (mm)	CARGA CRÍTICA Pcr (N)	Espesor reducido tr (mm)
 S1 PERFORACIÓN 20x5 mm	100	281605	0,650	 S2 PERFORACIÓN 30,5x16 mm	100	176127	0,888
	200	399072	0,820		200	286556	0,890
	300	278934	1,050		300	242468	0,990
	400	202852	1,200		400	173709	1,080
	500	176603	1,250		500	142597	1,127
	600	176168	1,270		600	132869	1,145
	700	169051	1,260		700	135415	1,154
	800	156766	1,250		800	145820	1,154
	900	141112	1,244		900	161688	1,155
	1000	124704	1,225		1000	155254	1,025
	1100	109375	1,205		1100	140006	0,916
	1200	95878	1,190		1200	124915	0,880
	1300	84339	1,175		1300	111088	0,830
	1400	74587	1,170		1400	98899	0,800
	1500	66371	1,130		1500	88333	0,750



SECCIÓN	LONGITUD (mm)	CARGA CRÍTICA Pcr (N)	Espesor reducido tr (mm)	SECCIÓN	LONGITUD (mm)	CARGA CRÍTICA Pcr (N)	Espesor reducido tr (mm)
 S2 PERFORACIÓN 27,5x12,5mm	100	176297	0,895	 S2 PERFORACIÓN 25x10 mm	100	176059	0,905
	200	282266	0,920		200	279996	0,940
	300	250217	1,040		300	256293	1,070
	400	182706	1,130		400	189652	1,170
	500	152610	1,173		500	160373	1,210
	600	144808	1,190		600	154104	1,225
	700	150002	1,197		700	161381	1,235
	800	163603	1,197		800	177504	1,235
	900	179819	1,177		900	187583	1,145
	1000	164795	1,027		1000	171360	1,114
	1100	147943	1,040		1100	153453	1,108
	1200	131562	0,950		1200	136215	1,030
	1300	116718	0,900		1300	120701	1,000
	1400	103722	0,910		1400	107183	0,961
	1500	92524	0,830		1500	95552	0,940
SECCIÓN	LONGITUD (mm)	CARGA CRÍTICA Pcr (N)	Espesor reducido tr (mm)	SECCIÓN	LONGITUD (mm)	CARGA CRÍTICA Pcr (N)	Espesor reducido tr (mm)
 S2 PERFORACIÓN 22,5x7,5 mm	100	175862	0,920	 S2 PERFORACIÓN 20x5 mm	100	175733	0,915
	200	278793	0,952		200	278576	0,940
	300	261797	1,070		300	267702	1,050
	400	195818	1,170		400	202278	1,170
	500	167222	1,220		500	174432	1,235
	600	162266	1,245		600	170909	1,255
	700	171379	1,250		700	181996	1,260
	800	189691	1,250		800	202679	1,270
	900	193938	1,200		900	200036	1,270
	1000	176774	1,150		1000	181915	1,270
	1100	158025	1,133		1100	162332	1,290
	1200	140100	1,125		1200	143744	1,280
	1300	124044	1,100		1300	127143	1,275
	1400	110081	0,975		1400	112756	1,345
	1500	98100	1,030		1500	100430	1,260

SECCIÓN	LONGITUD (mm)	CARGA CRÍTICA Pcr (N)	Espesor reducido tr (mm)	SECCIÓN	LONGITUD (mm)	CARGA CRÍTICA Pcr (N)	Espesor reducido tr (mm)
 <p>S3 PERFORACIÓN 30,5X16 mm</p>	100	167460	0,785	 <p>S3 PERFORACIÓN 27,5X12,5 mm</p>	100	173286	0,770
	200	221410	0,505		200	230511	0,474
	300	182113	0,535		300	190702	0,650
	400	130015	0,915		400	137569	0,960
	500	104747	1,050		500	112583	1,095
	600	95460	1,105		600	104494	1,153
	700	95448	1,133		700	106327	1,175
	800	101439	1,140		800	114647	1,187
	900	111657	1,149		900	127646	1,194
	1000	116439	1,090		1000	124913	1,060
	1100	103902	0,935		1100	111031	0,894
	1200	92175	0,820		1200	98151	0,892
	1300	81690	0,976		1300	86755	0,964
	1400	72580	1,086		1400	76916	1,024
	1500	64736	1,232		1500	68487	1,189
SECCIÓN	LONGITUD (mm)	CARGA CRÍTICA Pcr (N)	Espesor reducido tr (mm)	SECCIÓN	LONGITUD (mm)	CARGA CRÍTICA Pcr (N)	Espesor reducido tr (mm)
 <p>S3 PERFORACIÓN 25X10 mm</p>	100	177443	0,760	 <p>S3 PERFORACIÓN 22,5x7,5 mm</p>	100	181153	0,750
	200	236941	0,450		200	242669	0,445
	300	197001	0,690		300	202702	0,700
	400	143171	0,990		400	148239	0,978
	500	118450	1,125		500	123772	1,125
	600	111302	1,180		600	117500	1,190
	700	114561	1,210		700	122073	0,967
	800	124691	1,220		800	133861	1,230
	900	139801	1,220		900	150904	1,240
	1000	130767	1,020		1000	135728	0,966
	1100	115935	0,925		1100	120090	0,935
	1200	102273	1,040		1200	105770	1,120
	1300	90256	0,982		1300	93242	0,965
	1400	79929	0,976		1400	82499	0,964
	1500	71110	0,954		1500	73356	0,948




SECCIÓN	LONGITUD (mm)	CARGA CRÍTICA P_{cr} (N)	Espesor reducido t_r (mm)
 S3 PERFORACIÓN 20X5 mm	100	184965	0,745
	200	248406	0,440
	300	208533	0,670
	400	153399	0,940
	500	129220	1,100
	600	123907	1,180
	700	129891	1,220
	800	143456	1,240
	900	156893	1,165
	1000	140443	0,958
	1100	124041	0,943
	1200	109112	0,932
	1300	96102	0,875
	1400	84977	0,867
	1500	75524	0,845

Tabla 6.2-Valores de espesor reducido (t_r) en las bandas perforadas del perfil con CUFSM para equilibrar la carga crítica elástica de pandeo (P_{cr}) calculada en Ansys para las secciones S1, S2 y S3 con espesor 1,8mm.

El lector puede consultar en el Anexo E los valores de espesor reducido en las bandas perforadas de los modelos en CUFSM calculados para el resto de secciones y espesores.

6.5 Conclusiones sobre los resultados obtenidos en los cálculos previos

En este capítulo 6 se han presentado los resultados obtenidos de los cálculos previos de la carga crítica elástica para los perfiles de sección S1, S2 y S3 y espesor 1,8mm calculados con Ansys así como el valor de espesor relativo necesario en las bandas perforadas calculado en CUFSM para equilibrar la carga crítica elástica.

Con el objetivo de analizar estos resultados, se propone graficar los valores de espesor reducido en función de la longitud del perfil tal y como muestran la figura 6.3 y 6.4.

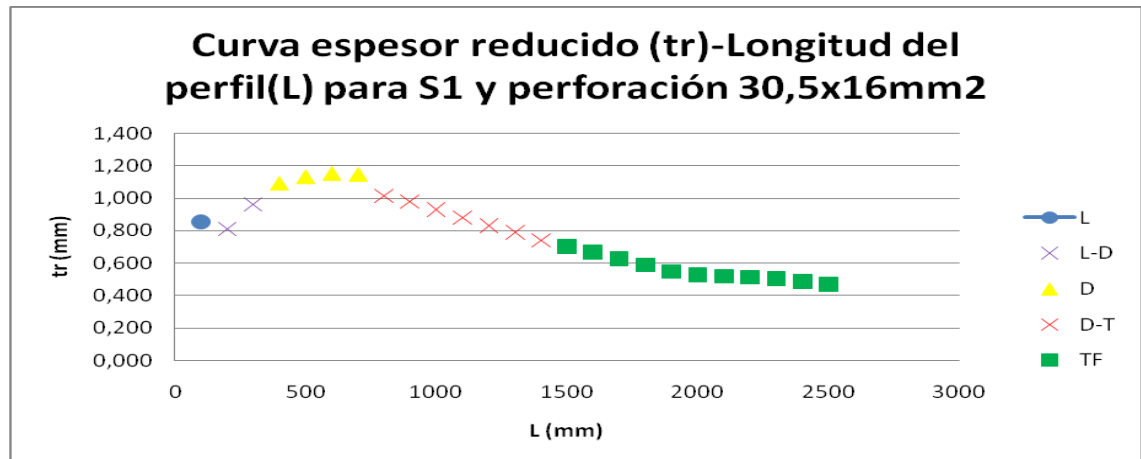


Figura 6.3-Curva de espesor reducido (t_r) en función de la longitud del perfil (L) de la sección S1 para tamaño de perforación de 30,5x16mm².

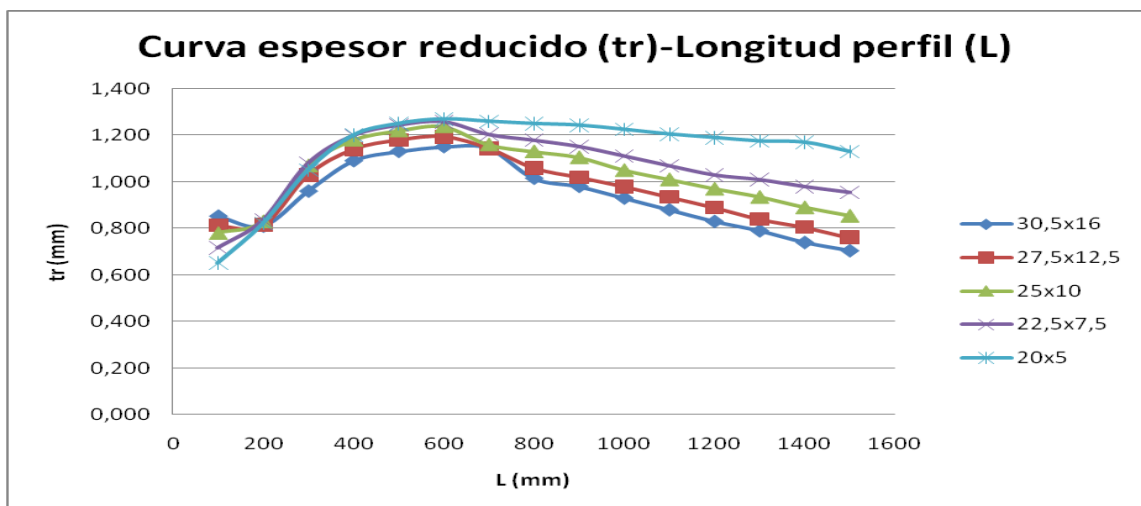


Figura 6.4-Curva de espesor reducido (t_r) en función de la longitud del perfil (L) de la sección S1 para diferentes tamaños de perforación.

La Figura 6.3 muestra el espesor reducido obtenido en CUFSM para diferentes semiondas sinusoidales de pandeo del perfil. Estos resultados corresponden a la sección S1 con tamaño de perforación de 30,5mmx16mm (primera figura del patrón de perforaciones presentado en el apartado 1.3 del capítulo 1). En este gráfico se han utilizado diferentes símbolos para distinguir los diferentes modos de pandeo: el círculos para perfiles sometidos a pandeo local (L), triángulos para pandeo distorsional (D), cuadrados para modo de pandeo global (TF) y cruces para las transiciones de pandeo local a distorsional (L-D) y de distorsional a global (D-TF). Tras analizar el gráfico se puede observar que:

- El espesor reducido depende del modo de pandeo.



- En un mismo modo de pandeo se muestra una pequeña dependencia con la longitud de la semionda sinusoidal de pandeo.
- En los rangos de las transiciones L-D y D-TF el espesor reducido cambia significativamente con la longitud de la semionda sinusoidal de pandeo.
- En el rango de longitudes estudiado, se han obtenido pocos resultados de pandeo local. Esto es debido a que el pandeo local se produce para longitudes del perfil muy cortas que sería imposible reproducir por la propia geometría del mismo, puesto que las perforaciones tienen unas dimensiones mínimas que superan a las longitudes estimadas para que se produzca abolladura local o bien porque estas perforaciones quedaría ubicadas en los extremos de los perfiles (o muy cerca de ellos) hecho que provocaría modos de pandeo muy específicos que no se consideran en este estudio.

En vista de estas observaciones, las consideraciones que se hacen son las siguientes:

- Se fijará una fórmula de espesor reducido para cada modo de pandeo.
- En los rangos de transición no se fijará ninguna fórmula de espesor reducido.
- La fórmula de espesor reducido para los modos local y distorsional se calibrará con las cargas críticas de pandeo elástico (valor mínimo de la carga crítica de pandeo) puesto que estas son las cargas generalmente consideradas en las ecuaciones del DSM. Las otras cargas de pandeo no se incluirán en los análisis de regresión. De este modo, se consigue evitar el inconveniente de la dependencia del espesor reducido con la longitud del perfil.
- El modo de pandeo global tendrá que considerar los efectos de la longitud de la semionda sinusoidal de pandeo.
- Debido a que no es posible capturar el valor de la carga mínima de pandeo local para los puntales analizados, este problema se solventará analizando el comportamiento de los perfiles para longitudes superiores bajo condiciones de empotramiento en los extremos del puntal, de tal forma que el modelo será suficientemente largo para minimizar los efectos de las condiciones de contorno finales y sin introducir restricciones en las longitudes de las semiondas de pandeo. Este procedimiento permite obtener las cargas de pandeo muy próximas a las cargas críticas de pandeo.

El inconveniente que surge a la hora de llevar a cabo estas consideraciones es que CUFSM en su versión 3.12 impone condiciones finales de pandeo en una semionda sinusoidal, por lo que para garantizar las condiciones de empotramiento en los extremos hay que recurrir a la versión 4.03 del programa. Por este motivo, se han realizado unos cálculos previos de verificación en los que, para el caso de la versión 3.12 de CUFSM, se han escogido los valores correspondientes al factor de carga mínima y se ha demostrado que los resultados obtenidos en los cálculos del espesor reducido para el modo local, realizados en ambas versiones del programa, son similares (la diferencia media de la carga de pandeo está alrededor del 2,5%). Cabe señalar, sin embargo, que el análisis realizado teniendo en cuenta las condiciones de semionda de pandeo sinusoidal es mucho más rápido, por lo que de ahora en adelante, todos los cálculos relativos a los análisis del perfil para obtener los espesores reducidos de los diferentes modos de pandeo se realizarán en la versión 3.12 de CUFSM.

Debido a la validez de este procedimiento, en el transcurso de este estudio se ha trabajado escogiendo el valor de carga mínima de pandeo local. Para ello, mediante la representación gráfica que ofrece en programa CUFSM en su versión 3.12, donde representa el factor de carga frente a la longitud de la semionda de pandeo, se escoge el primer valor mínimo de la curva que corresponde al factor de carga mínima del modo local, tal y como muestra la siguiente figura:

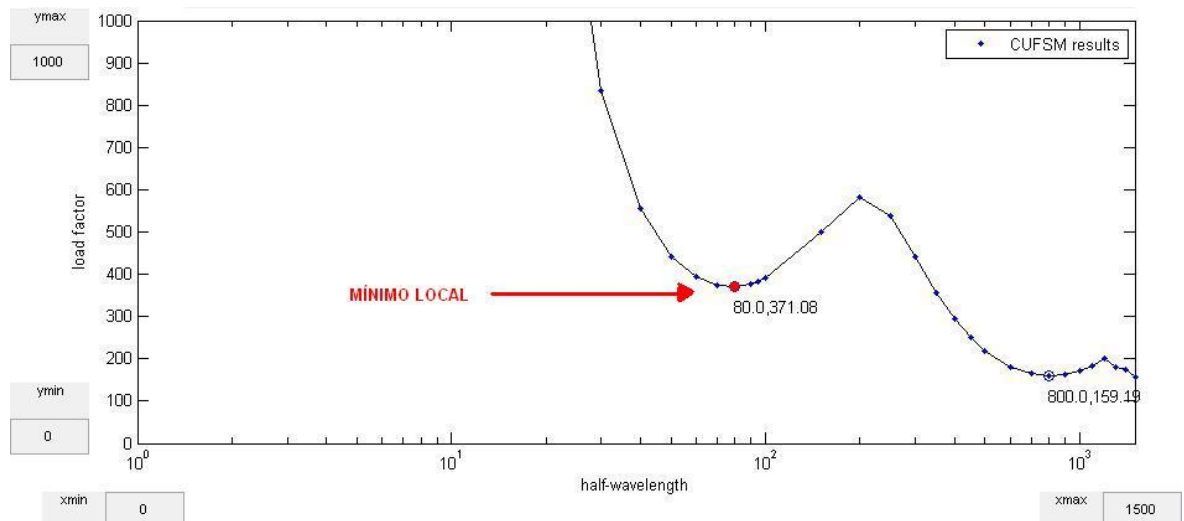


Figura 6.5- Ejemplo de selección del valor mínimo del factor de carga para un perfil tipo C en la versión 3.12 de CUFSM.



CAPÍTULO 7

FORMULACIÓN PARA EL ESPESOR REDUCIDO

7.1 Introducción

En el capítulo 6 se ha presentado un análisis previo de los perfiles estudiados y se ha puesto de manifiesto que el espesor reducido (t_r) necesario en las bandas perforadas del perfil depende de la longitud del mismo. Por este motivo y atendiendo a las consideraciones planteadas en el apartado 6.5 del capítulo anterior, en este capítulo 7 se procederá a realizar los cálculos de espesor reducido y el estudio de correlación y regresión correspondientes para cada modo de pandeo por separado.

El procedimiento para la preparación previa de los datos necesarios para realizar el estudio de regresión para los tres modos de inestabilidad por separado es el siguiente:

En primer lugar, se calibra para cada sección (S1, S2, S3, S4 y S5) y para cada uno de los tipos de perforaciones (presentados en el patrón de perforaciones del apartado 1.3 del capítulo 1) el valor del espesor reducido correspondiente al mínimo valor de carga crítica elástica del modo de inestabilidad analizado (local o distorsional). La normativa actual como por ejemplo *AISI* y *EC3 1-3* [2, 52 y 53] utilizan esta carga crítica mínima para deducir la resistencia del perfil a pandeo distorsional y local. Debido a que no existe el valor mínimo correspondiente al valor de carga crítica global, para el estudio de este modo se tendrá que considerar los efectos de la longitud de la semionda sinusoidal de pandeo.

En segundo lugar, se procede a tabular los valores de espesor reducido calculados para cada modo de inestabilidad por separado.

Finalmente, para poder realizar los análisis de regresión entre el espesor reducido, t_r (variable dependiente o que se pretende explicar) y expresiones matemáticas simples que combinan diferentes parámetros geométricos (variables independientes o explicativas), es necesario realizar un estudio de correlación entre los parámetros geométricos característicos de cada sección que mejor expliquen la respuesta del espesor reducido correspondiente. De esta forma, la fórmula que se obtenga en el posterior análisis de regresión dependerá de una determinada combinación de estos parámetros a través de un modelo de regresión lineal. Se recuerda al lector que el modelo de regresión lineal (presentado en la ecuación 4.2 del capítulo 4) será de la forma:



$$Y = b_0 + b_1 \cdot X_{1t} + b_2 \cdot X_{2t} + b_3 \cdot X_{3t} + \dots + b_k \cdot X_{kt} + u_t$$

Donde $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ son los parámetros o variables explicativas mencionadas y los coeficientes $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$ denotan la magnitud del efecto que estas variables tienen sobre la variable explicada Y . El coeficiente b_0 se denomina término constante del modelo. El término u se denomina término de error o perturbación del modelo.

7.2 Determinación de los parámetros geométricos y estudio de correlación lineal R.

Las siguientes figuras, que ya han sido presentadas en los capítulos 1 y 7, resumen los parámetros geométricos característicos de las secciones estudiadas en este proyecto.

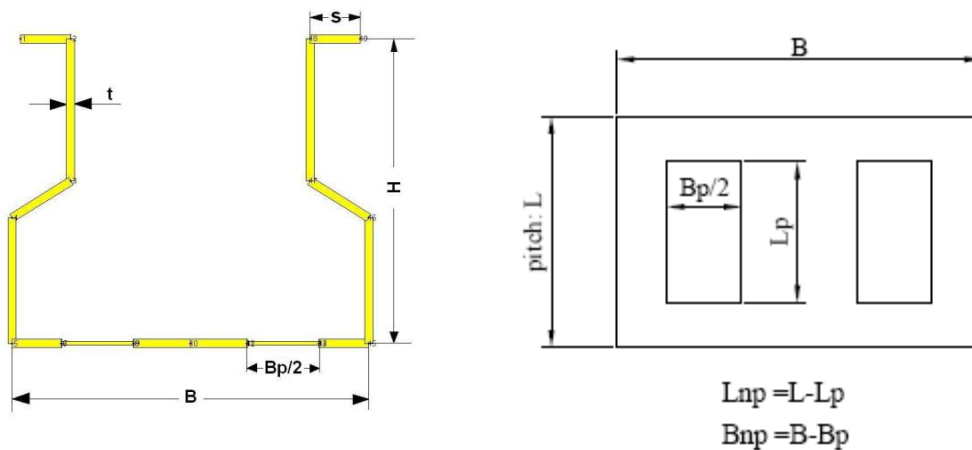


Figura 7.1- Parámetros geométricos de la sección S1 (izquierda) y parámetros geométricos del patrón de perforaciones (derecha).

Previamente a realizar el análisis de correlación, se ha de definir claramente algunas variables o ratios que relacionen los parámetros mostrados en las figuras anteriores intentando, en la medida de lo posible, que estas variables tengan sentido físico. Por ejemplo, al definir el espesor reducido bajo las solicitaciones de rigidez flexional a las que está sometida el alma de los perfiles estudiados, para una placa delgada de espesor constante, de acuerdo con el modelo de Love-Kirchhoff, la única rigidez relevante es la que da cuenta de las deformaciones provocadas por la flexión bajo carga perpendicular a la placa. Esta rigidez se conoce como rigidez flexional de placas y viene dada por:

$$D = \frac{E.L.t^3}{12.(1-\nu^2)} \quad (\text{Ec.7.1})$$

Por otro lado, teniendo en cuenta las perforaciones en el alma de los perfiles analizados, la rigidez de placa queda definida por:

$$D = \frac{E.L_{np}.t^3}{12.(1-\nu^2)} \quad (\text{Ec.7.2})$$

Y como resultado de las expresiones anteriores, (7.1) y (7.2) se tiene:

$$D = \frac{E.L.t^3}{12.(1-\nu^2)} = D = \frac{E.L_{np}.t^3}{12.(1-\nu^2)} \rightarrow t_r = t \left(\frac{L_{np}}{L} \right)^{1/3} \quad (\text{Ec.7.3})$$

Por tanto, una variable objeto de estudio será la mostrada en la ecuación anterior.

Otras variables importantes son las que se presentan en la siguiente tabla:

Variables	Modo Local		Modo Distorsional		Modo Global	
	Parámetros	R	Parámetros	R	Parámetros	R
x_1	$t.(L_{np}/L)^{1/3}$	0,484	$t.(L_{np}/L)^{1/3}$	0,958	$t.(L_{np}/L)$	0,696
x_2	$t.(B_{np}/B)^{1/3}$	0,497	$t.(B_{np}/B)^{1/3}$	0,780	$t.(B_{np}/B)^{1/3}$	0,394
x_3	$t.(B/H)$	0,878	$t.(B/H)$	0,260	$t.(B/H)$	0,010
x_4	$t.(L_{np}.B_{np})$	0,833	$t.(L_{np}.B_{np})$	0,316	$t.(L_{np}.B_{np})$	0,135
x_5	$t.(B_p/L_p)$	0,360	$t.(B_p/L_p)$	0,656	$t.(B_p/L_p)$	0,153
x_6	$t.(L_{np}.B_{np}/H.L)$	0,884	$t.(L_{np}.B_{np}/H.L)$	0,294	$t.(L_{np}.B_{np}/H.L)$	0,168

Tabla 7.1-coeficiente de correlación R de las variables explicativas consideradas en los estudios de correlación y regresión.



El sentido físico que se deduce de las expresiones mostradas en la tabla anterior es el siguiente:

- X_1 es la variable que resulta de la expresión (Ec.7.3).
(Como se puede apreciar en la tabla anterior, en el caso del modo global, la variable X_1 es ligeramente diferente por motivos de simplicidad ya que el coeficiente de correlación no se ve modificado).
- X_2 es una variación de la variable X_1 que justifica la teoría de la rigidez flexional de placas delgadas pero teniendo en cuenta el ancho del perfil en lugar de la longitud del mismo.
- X_3 es el ratio que relaciona el ancho del perfil con la altura del mismo.
- X_4 es la variable que pretende dar respuesta al espesor reducido en función del área perforada del perfil.
- X_5 es el ratio que relaciona el ancho perforado del perfil frente a la longitud perforada del mismo.
- X_6 es la variable resultante del producto de los ratios

$$t_r \left(\frac{L_{np}}{L} \right) \left(\frac{B_{np}}{B} \right) \left(\frac{B}{H} \right) = t_r \left(\frac{L_{np} \cdot B_{np}}{H \cdot L} \right) \quad (\text{Ec.7.4})$$

En Anexo F se ha realizado un análisis de correlación de un gran número de variables explicativas en función del espesor reducido y se han descartado aquellas que, a pesar de presentar un coeficiente de correlación elevado, carecen de sentido físico, seleccionando finalmente las seis variables propuestas en la tabla anterior.

Puede observarse que los coeficientes de correlación de las seis variables varían considerablemente en función del modo de inestabilidad, lo cual justifica el hecho considerado de estudiar los tres modos de pandeo por separado. De este modo, en el caso de pandeo distorsional, la variable que más relación guarda con el espesor reducido es X_1 , puesto que su valor de R es de 0,958, es decir, esta variable presenta una correlación con t_r casi perfecta (se recuerda que $-1 \leq R \leq 1$). Además, la correlación de X_1 con t_r es positiva, por lo que el hecho de aumentar el valor X_1 comporta un aumento en t_r .

En el modo Global, al igual que en el modo distorsional, X_1 es la variable que presenta mayor correlación con el espesor reducido, sin embargo, se aprecia que el grado de correlación es menor puesto que el valor de R para este caso es de 0,696.

Por último, en el caso de la abolladura local se observa que, a diferencia de los modos distorsional y global, la variable que mayor repercusión tiene sobre el comportamiento del

espesor reducido es X_6 . Comparando X_1 con X_6 se deduce que en el modo local la influencia de la altura del perfil (H) así como el ancho no perforado (B_{np}) es considerable, cosa que no ocurre en los modos global y distorsional.

Las figuras siguientes muestran la relación entre las cargas críticas de pandeo calculadas con CUFSM y las cargas críticas de Ansys obtenidas aplicando el concepto de espesor reducido derivado de la Ecuación 7.3 (los círculos representan el Modelo Mecánico).

Se puede observar que, aunque existe una buena correlación entre t_r y $t.(L_{np}/L)^{1/3}$, ésta ecuación simple no es suficiente para obtener valores precisos de espesor reducido (o cargas de pandeo).

A lo largo de este estudio se han aplicado inicialmente algunas ecuaciones tentativas similares pero no se han obtenido buenos resultados definitivos.

Esta es la razón por la que, finalmente, se ha decidido llevar a cabo análisis de regresión, cuyos resultados se presentan en el apartado siguiente.

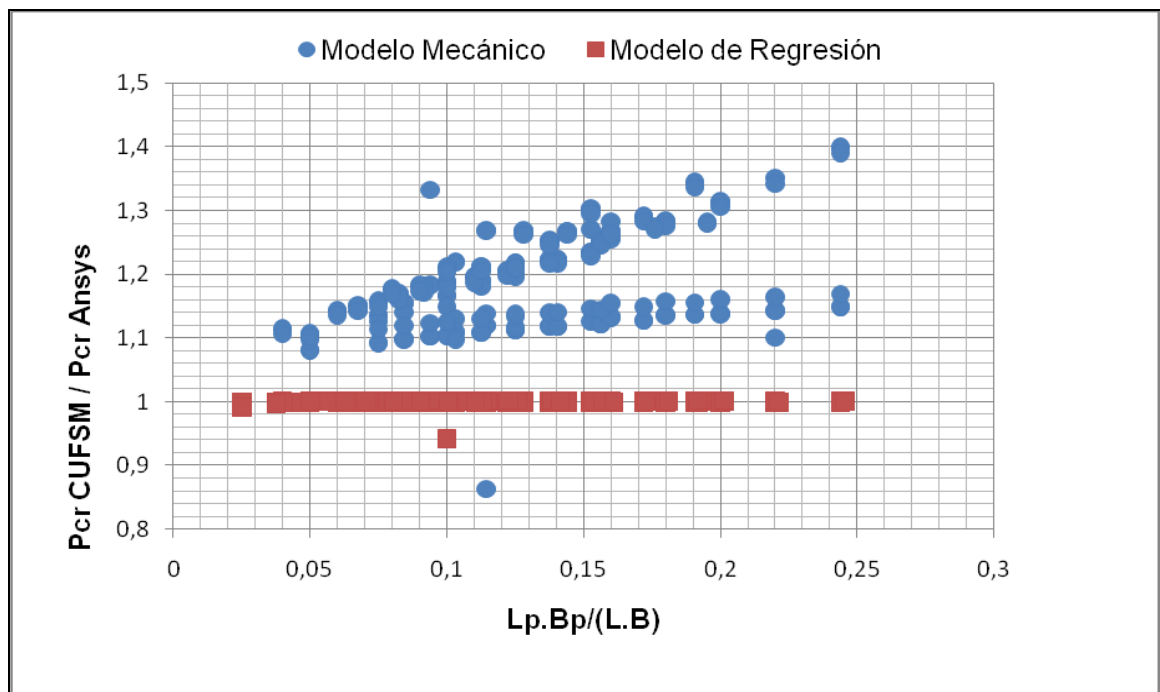


Figura 7.2-Modelo de Pandeo Local.



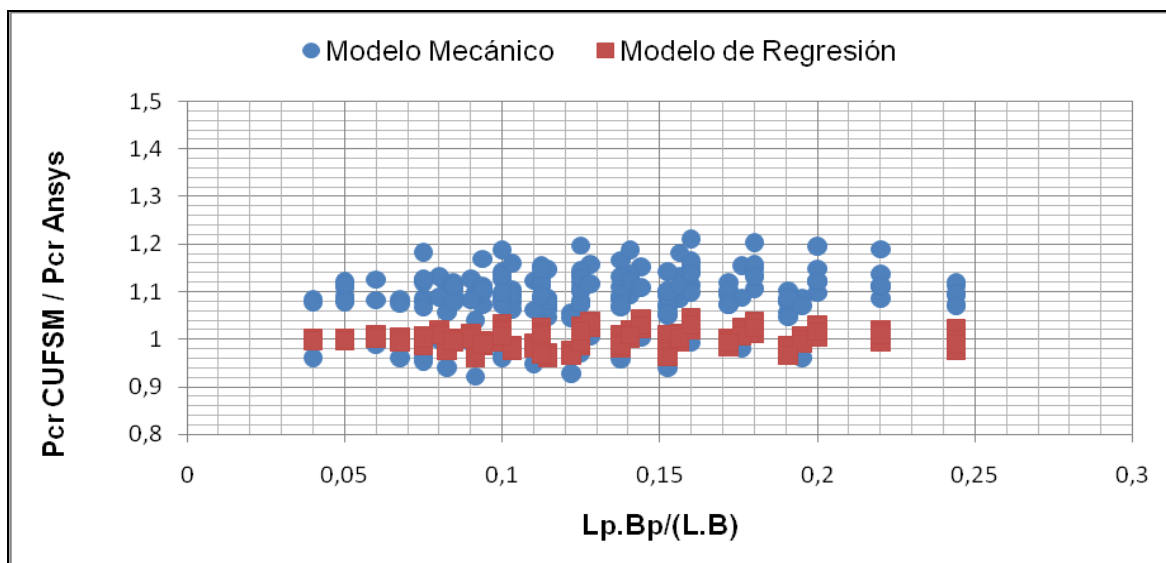


Figura 7.3-Modelo de Pandeo Distorsional.

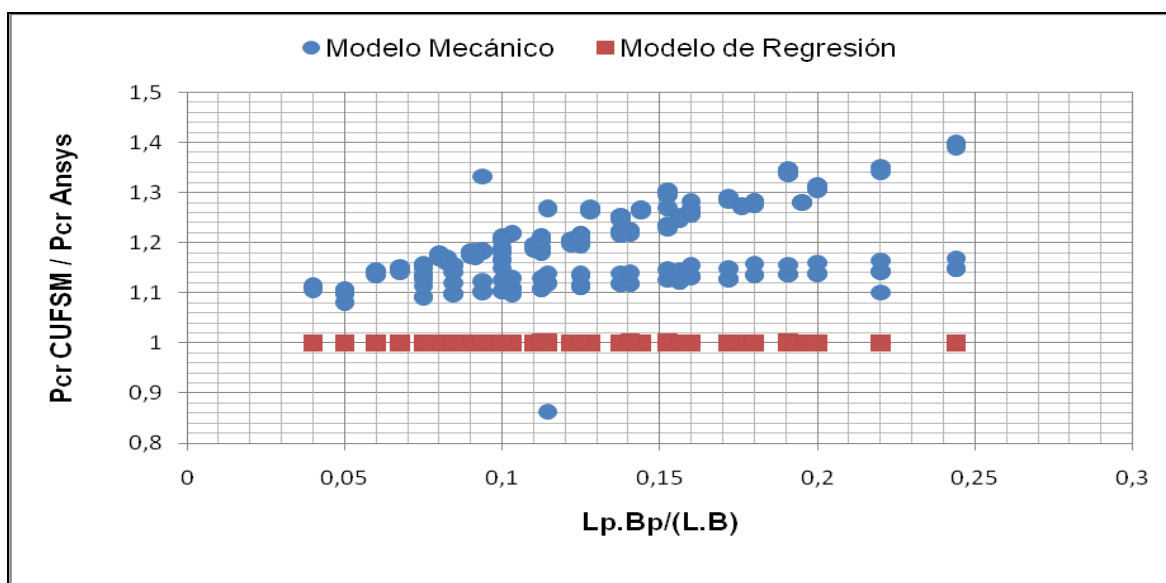


Figura 7.4-Modelo de Pandeo Global.

De las gráficas anteriores puede observarse que el modelo mecánico para el modo distorsional ajusta muy bien al modelo de regresión real, por lo que se espera que en los

estudios estadísticos de regresión, para el modo distorsional, la variable $t.(L_{np}/L)^{1/3}$ aparezca en el modelo como variable predominante.

Todo esto se explicará con más detalle en los apartados siguientes de este capítulo donde se presentarán los análisis de regresión realizados para cada modo de inestabilidad y las conclusiones obtenidas de los modelos finales seleccionados.

7.3 Estudio de regresión Lineal de los perfiles analizados en función del modo de inestabilidad

7.3.1 Introducción al análisis de datos mediante regresión múltiple

Para la realización de los análisis de regresión se utilizará el programa Excel de Microsoft Office. Excel incluye la herramienta de análisis de Regresión para ajustar el modelo de regresión múltiple, proporcionando simultáneamente las estimaciones de los parámetros, su contrastación individual y conjunta y el análisis de los residuos.

El proceso que se ha de llevar a cabo para realizar el análisis con esta herramienta es el siguiente:

En primer lugar se selecciona la opción *Análisis de datos* del menú *Datos* y en la lista de *Funciones* para análisis se elige *Regresión* que permite realizar un ajuste por regresión múltiple.



Figura 7.5-campos de la opción Análisis de datos mediante regresión a través de Excel.



- En *Rango Y* de entrada se introduce la referencia correspondiente al rango de datos dependientes. En este caso, la columna correspondiente al espesor reducido $Y = t_r$ (variable dependiente) puesto que es la variable que se pretende explicar. El rango de datos debe constar de una única columna de datos por lo que no se puede realizar un estudio con dos variables dependientes.
- En *Rango de X* de entrada se introduce la referencia correspondiente al rango de datos independientes. En este caso es posible introducir un máximo de 16 variables independientes.

La casilla Nivel de confianza se activará si se desea observar si existe probabilidad de éxito en la estimación del modelo. De esta manera, un nivel de confianza es un par de números entre los cuales se estima que estará cierto valor desconocido con una determinada probabilidad de acierto. La probabilidad de éxito en la estimación se representa con $1-\alpha$ y se denomina nivel de confianza. En estas circunstancias, α es el llamado error aleatorio o nivel de significación, esto es, una medida de las posibilidades de fallar en la estimación mediante tal intervalo. Cuanto mayor sea el intervalo de confianza mayor será la posibilidad de acierto (mayor nivel de confianza), mientras que para un intervalo más pequeño, que ofrece una estimación más precisa, aumentan sus posibilidades de error. La probabilidad de equivocarnos se llama nivel de significancia y se simboliza con α . Generalmente se construyen intervalos con confianza $1-\alpha=95\%$ (o significancia $\alpha=5\%$).

- Finalmente, se activan las casillas correspondientes a los gráficos residuales, curva de regresión ajustada y gráfico de probabilidad normal para analizarlos.

Para facilitar qué variables deben combinarse en primer lugar y realizar los estudios de regresión en un orden lógico, se propone ordenar de mayor a menor coeficiente de correlación las variables de la tabla 7.1 para cada modo de pandeo. La tabla 7.2 muestra el orden de estas variables:

Modo Local		Modo Distorsional		Modo Global	
Parámetros	R	Parámetros	R	Parámetros	R
$t.(L_{np}.B_{np} / H.L)$	0,884	$t.(L_{np} / L)^{1/3}$	0,958	$t.(L_{np} / L)$	0,696
$t.(B / H)$	0,878	$t.(B_{np} / B)^{1/3}$	0,780	$t.(B_{np} / B)^{1/3}$	0,394
$t.(L_{np}.B_{np})$	0,833	$t.(B_p / L_p)$	0,656	$t.(L_{np}.B_{np} / H.L)$	0,168
$t.(B_{np} / B)^{1/3}$	0,497	$t.(L_{np}.B_{np})$	0,316	$t.(B_p / L_p)$	0,153
$t.(L_{np} / L)^{1/3}$	0,484	$t.(L_{np}.B_{np} / H.L)$	0,294	$t.(L_{np}.B_{np})$	0,135
$t.(B_p / L_p)$	0,360	$t.(B / H)$	0,260	$t.(B / H)$	0,010

Tabla 7.2-Variables explicativas ordenadas de mayor a menor coeficiente de correlación (R) en función del modo de inestabilidad.

7.3.2 Espesor reducido para el modo de pandeo distorsional

Como se ha comentado en el apartado anterior, la variable X_1 de la tabla 7.1 muestra una relación del 95,8% con el espesor reducido, (valor de $R=0,958$) es decir, un modelo que incluya únicamente la variable X_1 explicaría en un 91,8% de la variabilidad de t_r (valor de $R^2=0,918$). Sin embargo, con el propósito de optimizar el modelo, se propone realizar un riguroso estudio de regresión lineal comprobando la respuesta de diferentes modelos creados mediante la combinación de las variables presentadas anteriormente.

De esta forma, y teniendo en cuenta la tabla 7.2 , a continuación se muestran los estudios de regresión que se han realizado para el espesor reducido t_r en función de las variables explicativas(X) y las conclusiones que se derivan de los modelos que se han obtenido:

Estudio 1: Tal y como se ha descrito en el apartado anterior, para realizar el estudio de regresión múltiple se introducen los datos correspondientes a la variable dependiente Y (columna de datos de la variable t_r) y los datos correspondientes a la variable independiente X (columna de datos de la variable $t.(L_{np} / L)^{1/3}$). Se activan las casillas comentadas anteriormente y al pulsar *Aceptar* se obtiene la salida numérica de la Figura 7.6, que incluye estadísticos de regresión, cuadro de análisis de la varianza del modelo, estimadores, contrastes de significancia de F y de T con sus p-valores asociados, intervalos de confianza para los parámetros y para las predicciones al 95%, y residuos.



Resumen Estudio 1	
Estadísticas de la regresión	
Coefficiente de correlación múltiple	0,95814065
Coefficiente de determinación R^2	0,918033504
R^2 ajustado	0,91777163
Error típico	0,066875507
Observaciones	315

ANÁLISIS DE VARIANZA

	G.Libertad	Suma de cuadrados	Promedio de los cuadrados	F	Valor crítico de F
Regresión	1	15,6783618	15,6783618	3505,633421	4,5327E-172
Residuos	313	1,399840386	0,004472334		
Total	314	17,07820218			

	Coefficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad	Inferior 95%	Superior 95%
Intercepción	-0,08236384	0,025529539	-3,226217193	0,001387105	-0,132595041	-0,03213263
Variable X 1	0,897528461	0,015158805	59,20838979	4,5327E-172	0,86770242	0,927354501

Figura 7.6-Datos estadísticos del análisis de regresión del Estudio 1 para el modo distorsional.

Del análisis anterior de regresión se concluye que los coeficientes del modelo resultan significativos al 95% (se rechaza la hipótesis nula de que valgan 0) ya que los p-valores (columna *Probabilidad*) son menores que 0,05. En concreto, el p-valor correspondiente a la variable $X_1 = t \cdot (L_{np} / L)^{1/3}$ es $4,53 \cdot 10^{-172} < 0,05$ y el correspondiente al término independiente (Intercepción) es $1,39 \cdot 10^{-3} < 0,05$. El contraste global del modelo también es muy bueno puesto que el valor de F (valor observado) es mucho mayor que su valor crítico ($3505 > 4,53 \cdot 10^{-172}$). Como se ha comentado en el capítulo 4, el valor de la variable F de Snedecor determina que la relación observada entre las variables dependientes e independientes no se produce al azar.

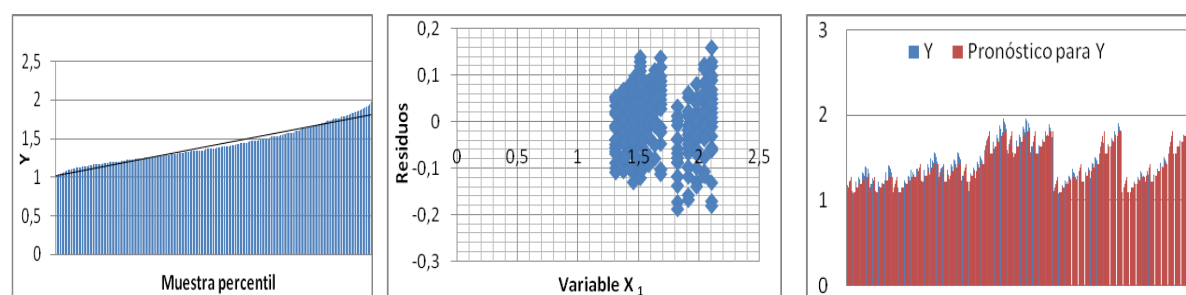


Figura 7.7-Gráfico de probabilidad normal (izquierda), gráfico de los residuos (centro) y gráfico de regresión del modelo ajustado (derecha) para la variable X_1 del Estudio 1.

Por otro lado, el gráfico de normalidad se ajusta bastante bien a la diagonal del primer cuadrante, lo cual indica que se cumple la hipótesis de normalidad en el modelo. El gráfico de los residuos contra la variable independiente presenta una tendencia bastante aleatoria, por lo que no existen problemas de autocorrección, no linealidad o heteroscedasticidad.

Respecto al gráfico de regresión del modelo ajustado, parece bastante razonable puesto que los valores pronosticados por el modelo obtenido se aproximan con bastante precisión a los valores reales.

Finalmente, el modelo de regresión obtenido en este primer estudio es:

$$t_r = 0,897.t.\left(\frac{L_{np}}{L}\right)^{1/3} - 0,082 \quad (\text{Ec.7.5})$$

Este modelo explica en un 91,8% la variabilidad del espesor reducido, por lo que teniendo en cuenta únicamente la variable X_1 de los parámetros geométricos de los perfiles analizados, se puede predecir en un 91,8% el valor del espesor reducido en las bandas perforadas del perfil para el modo distorsional.



Estudio 2: Con el propósito de mejorar aún más si cabe el modelo anterior, se realizará un nuevo estudio de regresión añadiendo al modelo la siguiente variable que presenta mayor valor de R, en este caso, para el modo distorsional es $t.(B_{np}/B)^{1/3} (X_2)$. Por tanto, en este nuevo estudio se realizará un análisis de regresión teniendo en cuenta X_1 y X_2 .

Procediendo análogamente al estudio anterior en cuanto a la introducción de datos se refiere, la salida numérica que proporciona Excel para este análisis de regresión es la que se muestra en la siguiente figura:

Resumen Estudio 2					
Estadísticas de la regresión					
Coeficiente de correlación múltiple (R)	0,982329121				
Coeficiente de determinación R ²	0,964970501				
R ² ajustado	0,964745953				
Error típico	0,043788568				
Observaciones	315				

ANÁLISIS DE VARIANZA					
	G.Libertad	Suma de cuadrados	Promedio de los cuadrados	F	Valor crítico de F
Regresión	2	16,47996132	8,239980661	4297,38945	8,5446E-228
Residuos	312	0,598240861	0,001917439		
Total	314	17,07820218			

	Coeficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad	Inferior 95%	Superior 95%
Intercepción	0,0078696	0,017288901	0,455182188	0,649294757	-0,02614798	0,04188718
Variable X 1	1,339344504	0,02377905	56,32455827	1,5481E-165	1,29255693	1,386132079
Variable X 2	-0,43203693	0,021130165	-20,44645335	1,50997E-59	-0,473612567	-0,39046129

Figura 7.8-Datos estadísticos del análisis de regresión del Estudio 2 para el modo distorsional.

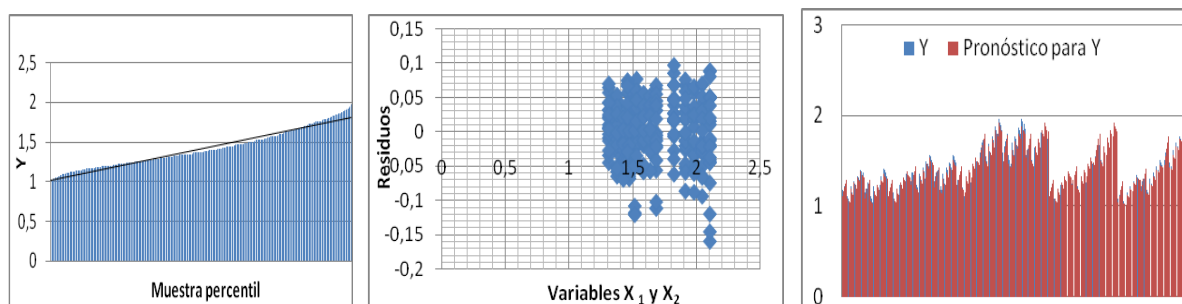


Figura 7.9-Gráfico de probabilidad normal (izquierda), gráfico de los residuos (centro) y gráfico de regresión del modelo ajustado (derecha) para X_1 y X_2 del Estudio 2.

En este segundo estudio se observa que el hecho de añadir la variable X_2 al modelo implica la mejora del coeficiente de determinación del mismo ($R^2 = 0,965$ en el segundo estudio frente a $R^2 = 0,918$ en el primer estudio).

Referente al resto de estadísticos, de la figura 7.8 se comprueba que los datos obtenidos son similares a los del estudio anterior. El contraste global en este caso ha mejorado ($F = 4297$) y la única diferencia sustancial entre ambos modelos es que en este último caso, el p-valor de la intercepción (término independiente) es $0,65 > 0,05$, por lo que se rechaza la hipótesis de considerar este coeficiente. Éste hecho resulta coherente puesto que el coeficiente de la intercepción es $0,0079$, lo cual es prácticamente despreciable y por tanto, no será considerado en el modelo.

En cuanto a los resultados mostrados en la figura 7.9, los gráficos obtenidos son similares a los mostrados en el Estudio 1. El gráfico de probabilidad normal cumple la hipótesis de normalidad en el modelo, los residuos presentan una tendencia aleatoria y los valores pronosticados para el espesor reducido resultan bastante razonables.

Como conclusión final de todas las consideraciones anteriores, el modelo obtenido en este segundo estudio cumple todos los requisitos e hipótesis y mejora en un 5 % aproximadamente la variabilidad del espesor reducido frente al modelo anterior, si bien cabe comentar que en contrapartida, es necesario introducir una variable adicional (X_2) al modelo, lo cual lo hace más complejo.

El modelo resultante en el Estudio 2 es el que se muestra a continuación:

$$t_r = 1,339.t.\left(\frac{L_{np}}{L}\right)^{1/3} - 0,432.t.\left(\frac{B_{np}}{B}\right)^{1/3} \quad (\text{Ec.7.6})$$

Estudio 3: de acuerdo al procedimiento seguido en los estudios anteriores, la siguiente variable que debería añadirse a este nuevo estudio para el modo distorsional es $X_5 = t.(B_p / L_p)$, de tal forma que el nuevo modelo contemplará la variabilidad del espesor reducido en función de la evolución de X_1 , X_2 y X_5 .

Introduciendo de nuevo los datos tal y como se ha explicado en el apartado 7.3 de este capítulo, Excel proporciona en este caso la siguiente tabla numérica:



Resumen Estudio 3	
Estadísticas de la regresión	
Coefficiente de correlación múltiple	0,989405955
Coefficiente de determinación R^2	0,978924144
R^2 ajustado	0,978720839
Error típico	0,034019936
Observaciones	315

ANÁLISIS DE VARIANZA

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Promedio de los cuadrados	F	Valor crítico de F
Regresión	3	16,71826445	5,572754815	4815,073744	3,1144E-260
Residuos	311	0,359937737	0,001157356		
Total	314	17,07820218			

	Coefficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad	Inferior 95%	Superior 95%
Intercepción	-0,01821775	0,01355446	-1,344041338	0,179914662	-0,044887794	0,008452286
Variable X 1	1,054330405	0,027125992	38,86790197	2,0661E-121	1,000956731	1,107704079
Variable X 2	-0,2297827	0,021637131	-10,61983246	1,10327E-22	-0,27235638	-0,18720903
Variable X 5	0,059317796	0,00413384	14,34932168	3,48451E-36	0,051183966	0,067451626

Figura 7.10 -Datos estadísticos del análisis de regresión del Estudio 3 para el modo distorsional.

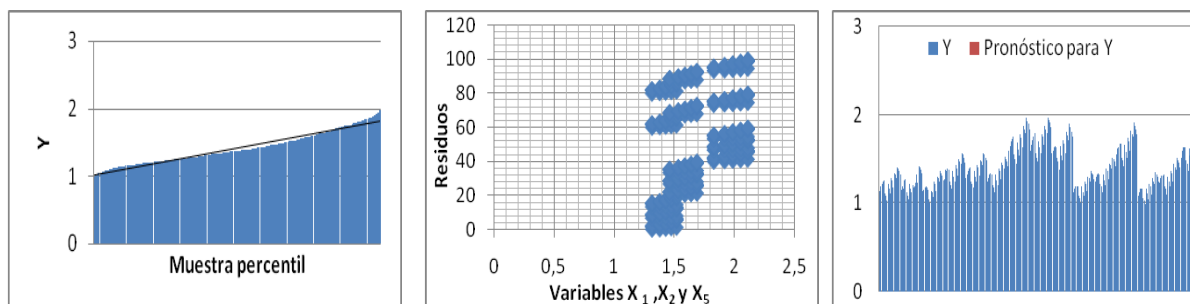


Figura 7.11-Gráfico de probabilidad normal (izquierda), gráfico de los residuos (centro) y gráfico de regresión del modelo ajustado (derecha) para X_1 y X_2 y X_5 del Estudio 3.

Como puede observarse en la Figura 7.10, el coeficiente de determinación en este tercer estudio es $R^2=0,979$, por lo que este modelo ha mejorado muy poco (1,4%) respecto al modelo del estudio anterior (97,9% en este estudio frente al 96,5% del modelo anterior).

Respecto a los demás estadísticos, no existe gran diferencia de los valores obtenidos respecto al modelo del estudio 2. El contraste (F) del modelo sigue siendo muy alto respecto de su valor crítico ($8,54 \cdot 10^{-228}$) lo que indica, al igual que en los casos anteriores, que los buenos resultados obtenidos no se producen al azar, y por consiguiente las variables propuestas en el modelo son realmente relevantes casi al 100%.

En cuanto a los resultados mostrados en la figura 7.11, los gráficos obtenidos son similares a los mostrados en el Estudio 2 y en el Estudio 1. El gráfico de probabilidad normal cumple la hipótesis de normalidad en el modelo puesto que se ajusta muy bien a la diagonal del primer cuadrante, los residuos presentan una tendencia aleatoria y los valores pronosticados para el espesor reducido resultan ser casi idénticos a los valores reales.

El modelo que se obtiene en este análisis es:

$$t_r = 1,054.t.\left(\frac{L_{np}}{L}\right)^{1/3} - 0,230.t.\left(\frac{B_{np}}{B}\right)^{1/3} + 0,060.t.\left(\frac{B_p}{L_p}\right) \quad (\text{Ec.7.7})$$

En resumen, a pesar de que este modelo explica un 1,4% más que el modelo del estudio anterior, presenta el inconveniente de incluir una variable más, lo que provoca que el modelo sea más complejo a la hora de utilizarlo en la realización de los cálculos.

Por consiguiente, el modelo óptimo es el correspondiente al obtenido en el estudio 2 (Ec.7.6) puesto que consigue explicar un 96,5% la variabilidad del espesor reducido empleando únicamente dos variables explicativas (X_1 y X_2).

De esta manera, el modelo escogido para el modo distorsional es:

$$t_r = 0,897.t.\left(\frac{L_{np}}{L}\right)^{1/3} - 0,082 \quad (\text{Ec.7.5})$$

Para este modelo, el promedio del ratio CUFSM/FEM y la desviación estándar para el espesor reducido así como para la carga crítica distorsional es:

Ratio	Promedio (μ)	Desviación estándar (σ)
$\frac{t_r \text{CUFSM}}{t_r \text{FEM}}$	1,006	0,03
$\frac{P_{cr} \text{CUFSM}}{P_{cr} \text{FEM}}$	0,999	0,015

Tabla 7.3-Valor promedio y desviación estándar para los ratios CUFSM/FEM del espesor reducido y la carga crítica de pandeo distorsional del modelo obtenido.



7.3.3 Espesor reducido para el modo de pandeo local

Para el modo de pandeo local, la tabla 7.1 muestra que la variable que presenta mayor relación con el espesor reducido es $X_6 = t \cdot (L_{np} \cdot B_{np} / H \cdot L)$, siendo el valor del coeficiente de correlación $R=0,884$. Por tanto, un modelo de espesor reducido para el modo local que incluya únicamente la variable X_6 explicaría en un 78,20% la variabilidad de t_r (valor de $R^2=0,782$). La literatura actual referente a análisis de regresión establece que el límite a partir del cual la calidad del ajuste del modelo comienza a ser significativa se da para valores de R^2 superiores a 0,8. De este modo, considerar únicamente la variable X_6 en un modelo de regresión para el modo local no es suficiente, y por consiguiente, para mejorar la calidad de ajuste, se debe añadir al modelo como mínimo otra variable.

Los estudios de regresión lineal múltiple más relevantes para la determinación del espesor reducido correspondientes a abolladura local se presentan a continuación:

Estudio 1: De acuerdo a las consideraciones comentadas en el párrafo anterior, las variables independientes que presentan mayor relación con el espesor reducido para el modo local y que por tanto son objeto de estudio en este primer análisis son X_6 y X_3 .

Introduciendo tal y como se ha procedido hasta ahora los datos correspondientes a las variables de estudio independientes X_6 , X_3 y la variable dependiente t_r obtenida para el modo de pandeo local, la Figura 7.12 muestra la salida numérica de los estadísticos más relevantes y los resultados gráficos de la Figura 7.13:

Resumen Estudio 1

Estadísticas de la regresión

Coeficiente de correlación múltiple	0,8986558
Coeficiente de determinación R²	0,80758225
R² ajustado	0,8063488
Error típico	0,17221586
Observaciones	315

ANÁLISIS DE VARIANZA

	G.Libertad	Suma de cuadrados	Promedio de los cuadrados	F	Valor crítico de F
Regresión	2	38,83671602	19,41835801	654,7360182	2,1991E-112
Residuos	312	9,253389964	0,029658301		
Total	314	48,09010599			

	Coeficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad	Inferior 95%	Superior 95%
Intercepción	0,3386629	0,025349657	13,35966367	1,67014E-32	0,288785001	0,38854079
Variable X 6	0,35157502	0,045324032	7,756922781	1,24677E-13	0,262395612	0,44075442
Variable X 3	0,14123139	0,022185355	6,365973681	6,92705E-10	0,097579562	0,18488321

Figura 7.12-Datos estadísticos del análisis de regresión del Estudio 1 para el modo local.

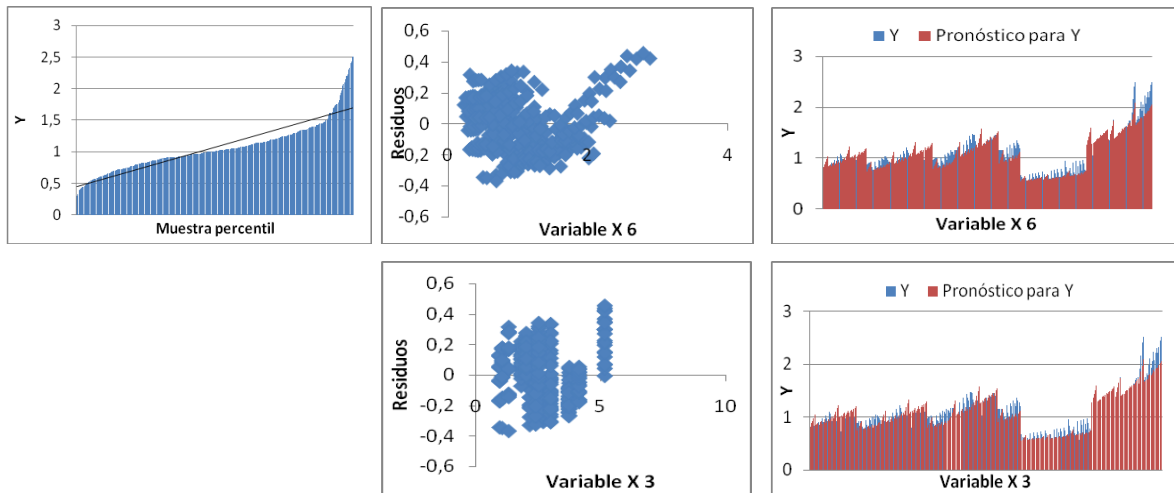


Figura 7.13-Gráfico de probabilidad normal (izquierda), gráficos de los residuos (centro) y gráfico de regresión del modelo ajustado (derecha) para X_6 y X_3 del Estudio 1.

En la figura 7.12 se observa que el modelo obtenido explica el 80,76% de la variación total. A pesar de ser un buen resultado, este modelo se descartará puesto que teniendo en cuenta únicamente la variable X_6 el modelo explicaría el 78,20%, lo cual supone sólo un 2,56% de diferencia con la ventaja de añadir una variable menos al modelo. Por tanto, el aporte de la variable X_3 al modelo no es significativo.

Este resultado era de esperar porque de hecho la variable X_3 está contemplada en la variable X_6 , es decir, se recuerda al lector que la variable X_6 es el resultado de la

combinación de las variables $t \cdot \left(\frac{L_{np}}{L} \right) \cdot \left(\frac{B_{np}}{B} \right) \cdot \left(\frac{B}{H} \right) = t \cdot \left(\frac{L_{np} \cdot B_{np}}{H \cdot L} \right) = X_6$. Esta es la explicación

por la que la aportación de la variable X_3 al modelo no es significativa y además el hecho de que aparezcan estas dos variables conjuntamente puede producir la aparición de multicolinealidad (ver apartado 4.5).

El modelo que se obtiene en este análisis es:

$$t_r = 0,352 \cdot t \cdot \left(\frac{L_{np} \cdot B_{np}}{H \cdot L} \right) - 0,141 \cdot t \cdot \left(\frac{B}{H} \right) + 0,339 \quad (\text{Ec.7.8})$$



Por otro lado, tal y como se muestra en los gráficos de ajuste de regresión (Figura 7.13), los valores pronosticados para el espesor reducido no son muy precisos, por lo que se debe optimizar el modelo.

En resumen, a pesar de que las pendientes del modelo (coeficientes de las variables) y el término constante resultan significativos al 95% (se rechaza la hipótesis nula de que valgan 0), ya que los p-valores son menores que 0,05, y además el contraste global del modelo es bueno (valor de F mayor que su valor crítico), el coeficiente de determinación no ha mejorado notablemente, por lo que se descarta la participación de la variable X_3 en el modelo.

Esto mismo ocurriría si al modelo se añadiera cualquiera de las variables X_1 , X_2 , X_3 y X_4 , ya que, como se ha comentado anteriormente, X_6 ya contempla la participación de estas variables, por lo que el único análisis que queda por estudiar es introducir en el modelo X_5 . A continuación se procede a ello:

Estudio 2: Con el propósito de mejorar el modelo anterior, se realizará un nuevo estudio de regresión añadiendo al modelo la variable $X_5 = t \cdot (B_p / L_p)$. Por tanto, en este nuevo estudio se realizará un análisis de regresión teniendo en cuenta X_5 y X_6 .

Procediendo análogamente al estudio anterior en cuanto a la introducción de datos se refiere, la salida numérica y la salida gráfica que proporciona Excel para este análisis de regresión es la que se muestra en las Figuras 7.14 y Figura 7.15 respectivamente:

Resumen Estudio 2	
Estadísticas de la regresión	
Coeficiente de correlación múltiple	0,93877414
Coeficiente de determinación R²	0,88129689
R² ajustado	0,88053597
Error típico	0,13526381
Observaciones	315

ANÁLISIS DE VARIANZA					
	G.Libertad	Suma de cuadrados	Promedio de los cuadrados	F	Valor crítico de F
Regresión	2	42,38166086	21,19083043	1158,203144	4,1313E-145
Residuos	312	5,708445129	0,018296298		
Total	314	48,09010599			

	Coeficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad	Inferior 95%	Superior 95%
Intercepción	0,10588037	0,025936232	4,082334452	5,67025E-05	0,054848335	0,15691241
Variable X 6	0,60659946	0,013647716	44,44695671	5,1639E-137	0,579746263	0,63345266
Variable X 5	0,17727433	0,01100586	16,1072672	6,67649E-43	0,155619236	0,19892942

Figura 7.14-Datos estadísticos del análisis de regresión del Estudio 2 para el modo local.

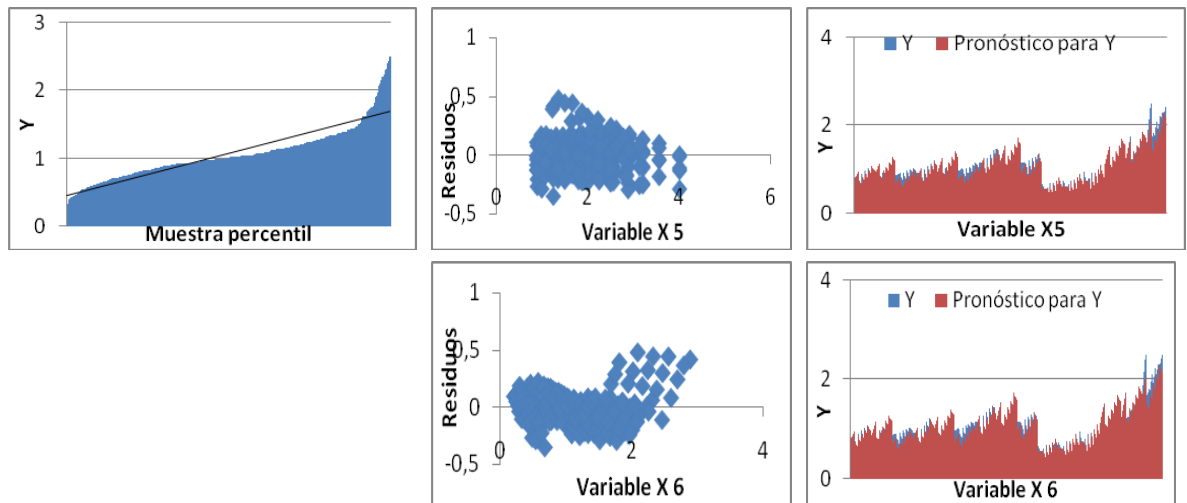


Figura 7.15-Gráfico de probabilidad normal (izquierda), gráficos de los residuos (centro) y gráfico de regresión del modelo ajustado (derecha) para X_5 y X_6 del Estudio 2.

En este caso, el coeficiente de determinación ha aumentado notablemente ($R^2 = 0,881$) y por tanto se consigue explicar un 88,1% de la variación total del espesor reducido. El contraste global del modelo es casi el doble respecto del obtenido en el modelo anterior (valor de $F = 1158$ muy superior a su valor crítico) y las pendientes del modelo y el término constante resultan significativos al 95% (se rechaza la hipótesis nula de que valgan 0), ya que los p-valores (columna probabilidad) son menores que 0,05.

En cuanto a los resultados gráficos mostrados en la Figura 7.15, cabe comentar que no existen problemas de autocorrelación, no linealidad o heteroscedasticidad puesto que los gráficos de residuos contra las variables independientes presentan una tendencia aleatoria. Por otro lado, el gráfico de probabilidad normal se ajusta bastante bien a la diagonal del primer cuadrante y los gráficos de regresión parecen bastante razonables en comparación a los obtenidos en el modelo anterior.

Finalmente, para el modo local, el modelo seleccionado es el que se ha obtenido en este segundo estudio y que se presenta a continuación:

$$t_r = 0,607.t.\left(\frac{L_{np}.B_{np}}{H.L}\right) + 0,177.t.\left(\frac{B_p}{L_p}\right) + 0,106 \quad (\text{Ec.7.9})$$



Este modelo, al igual que en el caso de pandeo distorsional, presenta únicamente dos variables (X_5 y X_6) y consigue explicar un 88,1% de la variación total del espesor reducido. En el caso del modo distorsional se ha conseguido llegar hasta el 96,5% y esto es debido en gran medida a que a la hora de calibrar los valores de espesor reducido a través de CUFSM, el modo local es mucho más sensible y por tanto cuesta más de calibrar llegando incluso a necesitar en muchos casos 4 decimales del valor de t_r , 2 decimales más que en el caso del pandeo distorsional.

Para este modelo, el promedio del ratio CUFSM/FEM y la desviación estándar del espesor reducido y la carga crítica global es:

Ratio	Promedio (μ)	Desviación estándar (σ)
$\frac{t_r CUFSM}{t_r FEM}$	1,03	0,152
$\frac{P_{cr} CUFSM}{P_{cr} FEM}$	1,04	0,093

Tabla 7.4-Valor promedio y desviación estándar para los ratios CUFSM/FEM del espesor reducido y la carga crítica de pandeo local del modelo obtenido.

Los valores de la tabla anterior se han obtenido tras calcular uno a uno los valores de error cometido en espesor y en carga entre CUFSM y ANSYS si se emplea el modelo determinado en la ecuación (Ec.7.9).

En cuanto al valor promedio en carga, a pesar de que el resultado es no-conservativo, no se aleja demasiado del valor de referencia 1, por lo que es bastante admisible. Sin embargo, en cuanto al valor de la desviación estándar se refiere, un 9,3% es un porcentaje de error muy elevado y que se aleja bastante de las expectativas de los autores por determinar un modelo válido y fiable para el modo local.

No obstante, a pesar de la incertidumbre que despierta el modelo del modo local, se trabajará con éste en la etapa de verificación y comprobación de los perfiles para determinar el error real que se cometería al emplear este modelo.(Ver capítulo 8).

7.3.4 Espesor reducido para el modo de pandeo global

Tal y como se ha mostrado en la Figura 6.3 resulta imposible determinar el valor mínimo de carga crítica global, por lo que el espesor reducido para el modo global debe ser función de la longitud de pandeo en una semionda sinusoidal. Sin embargo, en los primeros pasos del desarrollo del modelo también se ha observado que si no se considera esta longitud de pandeo, la pérdida de precisión en los resultados obtenidos no es dramática desde el punto de vista práctico. El error se hace más grande pero aceptable. Por ejemplo, si se utiliza cualquiera de las ecuaciones obtenidas para el modo distorsional (Ec.7.6) o local (Ec.7.9), el máximo error cometido en la predicción de las cargas de pandeo global ronda el 4%.

El modelo se debe calibrar con cargas de pandeo global determinadas al principio del rango global mediante el FEM. La carga del FEM elegida para determinar el espesor reducido en CUFSM será la correspondiente a la longitud de la semionda de pandeo que proporcione una participación del 90% del modo de pandeo global. Si se escoge una longitud mayor, el resultado de los errores cometidos es significativo en el comienzo del rango global, donde la combinación del pandeo distorsional y pandeo de flexo-torsión es relevante. Por el contrario, calibrando el modelo con longitudes cortas de pandeo global no produce errores considerables para largas longitudes de pandeo en una semionda.

Los resultados obtenidos de acuerdo al proceso descrito anteriormente se muestran en Anexos F.

Durante toda la campaña de cálculos relativos al modo de pandeo global, se ha detectado que a la hora de iterar los valores de espesor reducido mediante CUFSM las cargas de pandeo son muy poco sensibles a las variaciones de espesor, por lo que existe un gran intervalo de valores posibles de t_r que cumplan la condición impuesta en el proceso de calibrado ($\xi < \pm 0,2\%$). Este hecho justifica la hipótesis de considerar un amplio abanico de posibilidades para la determinación de la formulación para el modo global.

La tabla 7.1 presentada en el apartado 7.2 de este capítulo muestra que para el modo de pandeo global la variable que muestra una relación considerable con el espesor reducido es X_1 ($R=0,696$). A pesar de que esta variable explicaría por sí sola únicamente el 48,5% de la variación total del espesor reducido, ($R^2= 0,485$), las pruebas de validación del modelo que se presentan en el siguiente capítulo muestran que en el modo global no es necesario obtener un modelo con un alto coeficiente de determinación, ya que el error final cometido en la carga de pandeo es bajo.

Para verificar todas estas hipótesis se presenta a continuación los estudios más relevantes realizados para el modo global:



Estudio 1: De acuerdo a las consideraciones comentadas en el párrafo anterior, la variable independiente que presentan mayor relación con el espesor reducido para el modo global y que por tanto es objeto de estudio en este primer análisis es X_1 .

Introduciendo tal y como se ha procedido hasta ahora los datos correspondientes a las variables de estudio independientes X_i y la variable dependiente t_i obtenida para el modo de pandeo global, la Figura 7.16 muestra la salida numérica de los estadísticos más relevantes y los resultados gráficos de la Figura 7.17:

Resumen Estudio 1					
Estadísticas de la regresión					
Coeficiente de correlación múltiple	0,69636161				
Coeficiente de determinación R^2	0,4849195				
R^2 ajustado	0,48327387				
Error típico	0,15909995				
Observaciones	315				

ANÁLISIS DE VARIANZA					
	G.libertad	Suma de cuadrados	Promedio de los cuadrados	F	Valor crítico de F
Regresión	1	7,458971273	7,458971273	294,672001	5,22383E-47
Residuos	313	7,922904124	0,025312793		
Total	314	15,3818754			

	Coeficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad	Inferior 95%	Superior 95%
Intercepción	0,08768387	0,044470619	1,97172599	0,04952121	0,000184733	0,17518302
Variable X 1	0,70806151	0,041247872	17,16601295	5,2238E-47	0,62690335	0,78921966

Figura 7.16-Datos estadísticos del análisis de regresión del Estudio 1 para el modo local.

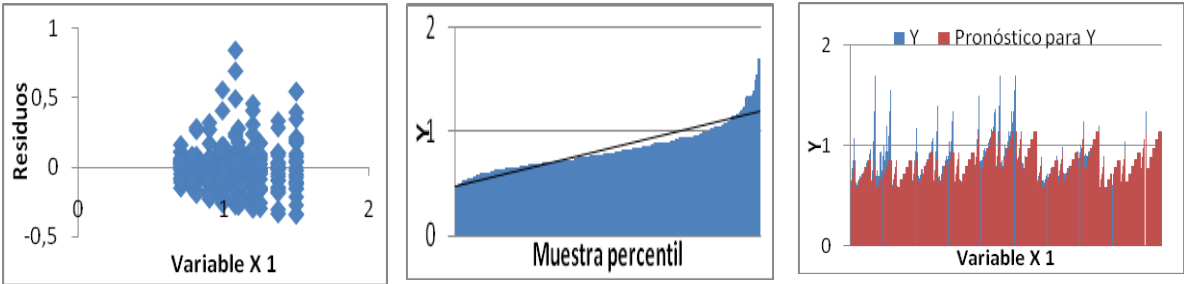


Figura 7.17-Gráfico de probabilidad normal (izquierda), gráficos de los residuos (centro) y gráfico de regresión del modelo ajustado (derecha) para X_1 del Estudio 1 del modo global.

Del análisis anterior de regresión se concluye que los coeficientes del modelo resultan significativos al 95% (se rechaza la hipótesis nula de que valgan 0) ya que los p-valores (columna *Probabilidad*) son menores que 0,05. En concreto, el p-valor correspondiente a la variable $X_1 = t \cdot (L_{np} / L)^{1/3}$ es $5,22 \cdot 10^{-47} < 0,05$ y el correspondiente al término independiente

(Intercepción) es $4,95 \cdot 10^{-2} \cong 0,05$ y por tanto, no resulta significativo en el modelo. El contraste global del modelo también es muy bueno puesto que el valor de F (valor observado) es mucho mayor que su valor crítico ($294 > 5,22 \cdot 10^{-47}$).

En cuanto a los resultados gráficos mostrados en la Figura 7.17, cabe comentar que no existen problemas de autocorrelación, no linealidad o heteroscedasticidad puesto que los gráficos de residuos contra las variables independientes presentan una tendencia aleatoria y el gráfico de probabilidad normal se ajusta bastante bien a la diagonal del primer cuadrante. Por otro lado, el gráfico de regresión muestra que en algunos puntos el ajuste del modelo no es muy bueno, aunque en el caso del modo global este hecho no es excesivamente relevante puesto que, debido a que este modo de inestabilidad es muy poco sensible a la variabilidad del espesor reducido, se podrán considerar como válidos modelos que, a pesar de no tener un coeficiente de determinación elevado, cumplan las demás hipótesis.

El modelo obtenido en este primer estudio se presenta a continuación:

$$t_r = 0,71 \cdot t \cdot \left(\frac{L_{np}}{L} \right) \quad (\text{Ec.7.10})$$

En este caso, el modelo explicaría el 48,49% de la variabilidad del espesor reducido, lo cual es un buen resultado teniendo en cuenta la sensibilidad del modo global respecto del espesor reducido.

Con objeto de estudiar la posibilidad de optimizar este modelo, a continuación se realizará un nuevo estudio introduciendo al modelo anterior la siguiente variable que guarda mayor relación con el t_r del modo global, ésta es, X_2 (tabla 7.2).

Estudio 2: La siguiente Figura 7.18 muestra la salida numérica de los estadísticos más relevantes para el análisis de las variables X_1 y X_2 frente al espesor reducido (t_r):



Resumen Estudio 1

Estadísticas de la regresión	
Coefficiente de correlación múltiple	0,6963943
Coefficiente de determinación R ²	0,48496502
R ² ajustado	0,48166351
Error típico	0,15934767
Observaciones	315

ANÁLISIS DE VARIANZA

	G.libertad	Suma de cuadrados	Promedio de los cuadrados	F	Valor crítico de F
Regresión	2	7,459671482	3,729835741	146,892047	1,11309E-45
Residuos	312	7,922203915	0,025391679		
Total	314	15,3818754			

	Coefficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad	Inferior 95%	Superior 95%
Intercepción	0,08291478	0,052995995	1,564548013	0,1187026	-0,021359952	0,18718951
Variable X 1	0,70345663	0,049755819	14,13817808	2,0577E-35	0,605557261	0,80135601
Variable X 2	0,00604364	0,036394059	0,166061145	0,86821639	-0,065565182	0,07765246

Figura 7.18-Datos estadísticos del análisis de regresión del Estudio 2 para el modo global.

Como puede observarse en los valores de los estadísticos de este segundo estudio, el hecho de incluir la variable X_2 al modelo no aporta ninguna mejoría respecto del modelo obtenido en el primer estudio ya que el coeficiente de determinación es prácticamente el mismo (48,5%). De hecho, en la figura anterior se aprecia que el coeficiente correspondiente a la variable X_2 se rechaza (se acepta la hipótesis nula de que valga 0) puesto que su p-valor asociado es $0,868 > 0,05$ por lo que no resulta significativo considerar su participación. De igual forma ocurre con el p-valor de la intercepción que, por ser superior a 0,05 ($0,12 > 0,05$) se acepta la hipótesis nula de que valga 0 y por tanto se rechaza la participación de su coeficiente asociado en el modelo.

La salida gráfica para este análisis es la que se muestra a continuación:

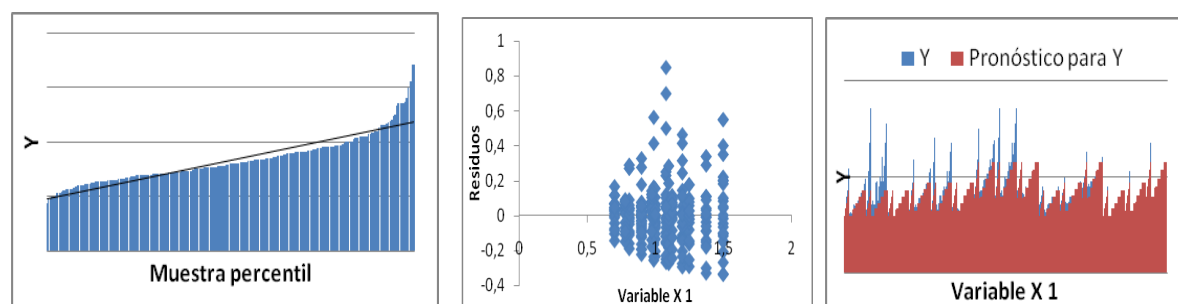


Figura 7.19-Gráfico de probabilidad normal (izquierda), gráficos de los residuos (centro) y gráfico de regresión del modelo ajustado (derecha) para X_1 del Estudio 2 del modo global.

La salida gráfica es muy similar a la obtenida en el modelo 1. El gráfico de probabilidad normal se ajusta bastante bien a la diagonal del primer cuadrante y el gráfico de residuos presenta tendencia aleatoria por lo que no existen problemas de autocorrelación, no linealidad o heteroscedasticidad.

Por tanto, el modelo seleccionado para el modo de pandeo global es el que se ha obtenido en ambos estudios:

$$t_r = 0,71.t.\left(\frac{L_{np}}{L}\right) \quad (\text{Ec.7.10})$$

Para este modelo, el promedio del ratio CUFSM/FEM y la desviación estándar del espesor reducido y la carga crítica global es:

Ratio	Promedio (μ)	Desviación estándar (σ)
$\frac{t_r CUFSM}{t_r FEM}$	0,907	0,157
$\frac{P_{cr} CUFSM}{P_{cr} FEM}$	1,018	0,017

Tabla 7.5-Valor promedio y desviación estándar para los ratios CUFSM/FEM del espesor reducido y la carga crítica de pandeo global del modelo obtenido.

En la tabla anterior puede apreciarse que a pesar de que la desviación estándar en valores de espesor reducido es elevada (15,7%) y el promedio obtenido es un poco decadente, en valores de carga crítica estos resultados mejoran notablemente obteniendo un promedio excelente y una desviación de tan sólo 1,7%.



7.4 Conclusiones sobre los modelos obtenidos

A lo largo de todo el proyecto se han presentado los resultados de una investigación sobre el cálculo de las cargas elásticas de pandeo de las columnas perforadas de estantería metálica analizadas por medio del *FSM* empleando el concepto de espesor reducido. Después de varios modelos preliminares que no tuvieron éxito, se decidió llevar a cabo análisis de regresión para determinar las ecuaciones de espesor reducido.

Estas ecuaciones son el resultado de un riguroso y exhaustivo proceso de cálculo en el que se ha analizado cinco puntales con secciones de forma y dimensiones muy diferentes con el objetivo de generalizar la validez de las ecuaciones de espesor reducido obtenidas para cualquier tipo de sección transversal del puntal.

De los resultados que se han obtenido se puede concluir que:

- 1) Se debe establecer una ecuación de espesor reducido para cada modo de pandeo por separado.
- 2) El espesor reducido necesario en las bandas perforadas de la sección transversal del perfil puede ser independiente de la longitud de la semionda de pandeo, aunque ello requiere unas determinadas simplificaciones (por ejemplo, los modelos han sido desarrollados para predecir sólo las cargas críticas de pandeo local, global y distorsional sin tener en cuenta el comportamiento en las transiciones de los tres modos descritos).
- 3) Se ha obtenido una buena precisión en los modelos con ecuaciones más simples que involucran determinados parámetros geométricos de la sección y que además presentan significado físico.

Por tanto, el siguiente paso en el proyecto es determinar y evaluar el alcance y la exactitud que ofrecen los modelos pre-establecidos cuando se aplican a secciones transversales de puntales reales, con diferentes patrones de perforación y formas más complejas de sección.

De este modo, en el siguiente capítulo se propone realizar un nuevo estudio de verificación de los modelos obtenidos para cada modo de inestabilidad evaluando el comportamiento de diez perfiles escogidos al azar y que están presentes en numerosos catálogos de fabricantes.

CAPÍTULO 8

VALIDACIÓN DE LOS MODELOS OBTENIDOS PARA CADA TIPO DE INESTABILIDAD

8.1 Introducción

Como ya se ha anunciado en los capítulos anteriores, en este octavo capítulo se presenta un estudio sobre la viabilidad y el alcance de las formulaciones desarrolladas de los tres tipos de inestabilidad (local, distorsional y global) en el análisis de perfiles de chapa conformada en frío y con perforaciones.

Para garantizar la validez de las fórmulas obtenidas, se han escogido diez puntales totalmente diferentes geométricamente y con perforaciones dispares. (Figura 8.1).

Es importante destacar que los perfiles (S1, S2, S3, S4 y S5) que se han analizado a lo largo de todo el proyecto (y que han sentado las bases de los resultados empleados en los posteriores análisis de regresión del espesor reducido) únicamente presentaban perforaciones en el alma del perfil, así como también los cinco puntales disponían de labios rigidizadores.

Los perfiles que se han escogido para los estudios de comprobación y verificación y que se presentan en este capítulo tienen geometrías totalmente diferentes, perforaciones en alma y alas y no todos disponen de labios rigidizadores. Esto es debido a que estos perfiles se han modelado a partir de determinados perfiles reales que utilizan determinadas empresas y que por motivos de confidencialidad no se muestran las dimensiones ni las cotas de los mismos. (El lector puede observar algunos detalles más sobre la geometría de los mismos consultando el Anexo A).

De este modo, en la siguiente figura se muestra la geometría de los perfiles analizados en esta nueva etapa de validez de los modelos:



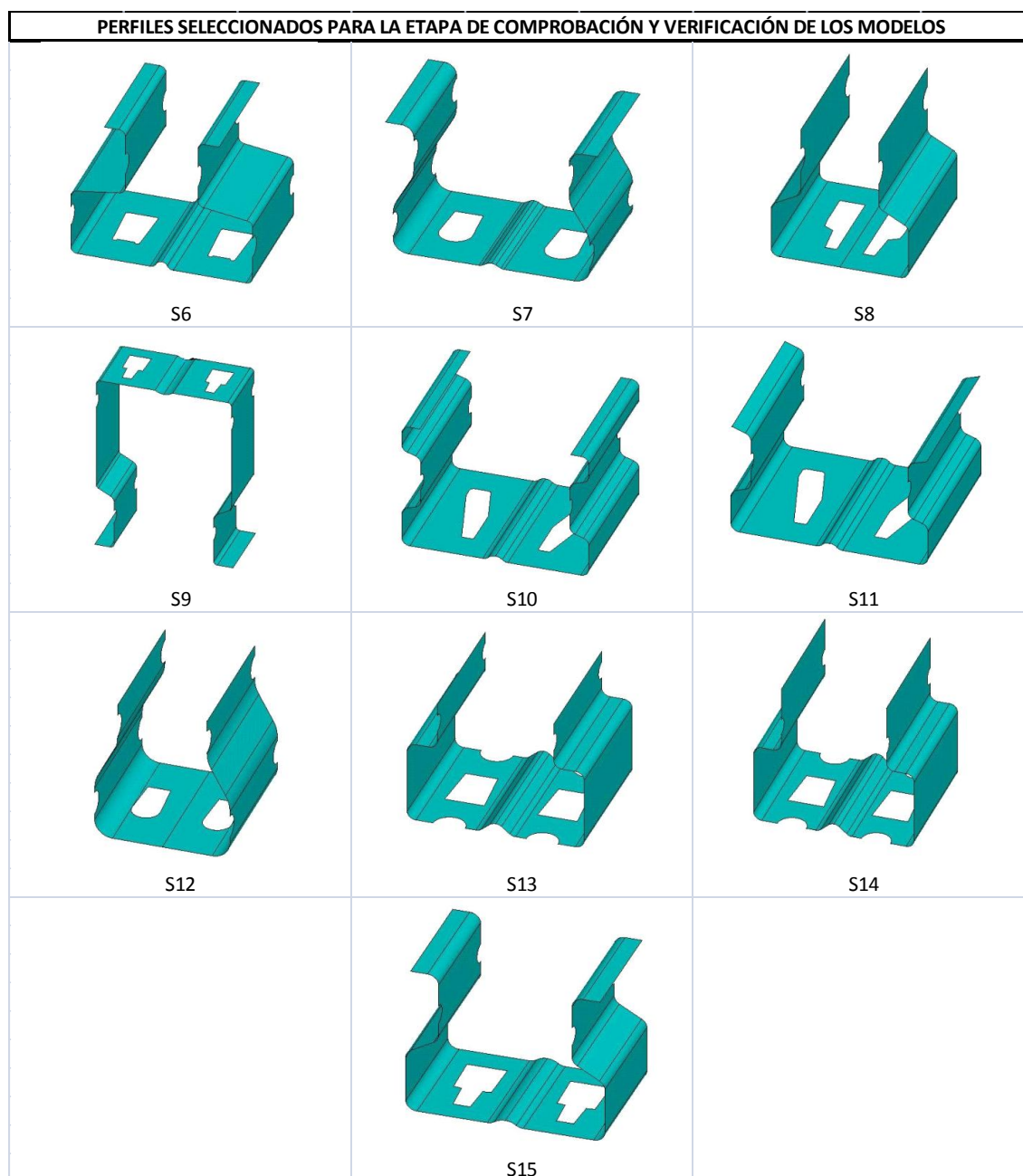


Figura 8.1-Vista de la sección de los perfiles escogidos para el análisis en la etapa de comprobación y verificación de los modelos de espesor reducido determinados para los modos local, distorsional y global.

Para comprobar la validez de estas fórmulas en el análisis de los puntales anteriores, es importante realizar los análisis mediante *FEM* (con Ansys) y mediante *FSM* (con CUFSM) garantizando la correcta modelización de la geometría en ambos programas así como garantizar las mismas condiciones de enlace y contorno para los puntales que se analizarán mediante ambos métodos.

Esta tarea de preparación de las macros tanto en Ansys como en CUFSM conlleva una dedicación de tiempo importante y es crucial puesto que el más mínimo error comportaría unos resultados erróneos y al mismo tiempo la incorrecta evaluación de las fórmulas establecidas.

Por ello, se han realizados una serie de cálculos de comprobación para garantizar que estas condiciones de geometría, de enlace y de contorno para el cálculo en Ansys y en CUFSM sean las mismas. Para el calibrado de estos resultados se han analizado los perfiles sin ningún tipo de perforación. Los resultados que se han obtenido en este proceso de calibrado en Ansys y CUFSM para el cálculo se muestran en la siguiente tabla:

a) Modo Local			
PUNTAL	Carga crítica FEM (N)	Carga crítica CUFSM (N)	$P_{críticaCUFSM}/P_{críticaFEM}$
S6	434757	427743	0,98
S7	281779	289500	1,03
S8	613943	619937	1,01
S9	685444	681166	0,99
S10	347779	346339	1
S11	289067	286479	0,99
S12	287824	300424	1,04
S13	732485	747912	1,02
S14	724306	725221	1
S15	372193	373834	1
Promedio (μ)			1
Desviación Estándar (σ)			0,02



b) Modo Distorsional			
PUNTAL	Carga crítica FEM (N)	Carga crítica CUFSM (N)	$P_{críticaCUFSM}/P_{críticaFEM}$
S6	243040	245015	1,01
S7	177473	178298	1
S8	176257	182020	1,03
S9	190493	191453	1,01
S10	213270	214063	1
S11	262583	253651	0,97
S12	56257	56820	1,01
S13	170068	172960	1,02
S14	155764	159653	1,02
S15	196508	197965	1,01
Promedio (μ)			1
Desviación Estándar (σ)			0,02

c) Modo Gobal			
PUNTAL	Carga crítica FEM (N)	Carga crítica CUFSM (N)	$P_{críticaCUFSM}/P_{críticaFEM}$
S6	59912	59796	1
S7	48176	48277	1
S8	54555	54964	1,01
S9	65144	65280	1
S10	56434	56539	1
S11	77196	77380	1
S12	29293	29411	1
S13	83810	81183	0,97
S14	76644	76954	1
S15	47154	47285	1
Promedio (μ)			1
Desviación Estándar (σ)			0,01

Tabla 8.1-Resultados obtenidos en el proceso de calibrado de la geometría y condiciones de enlace y contorno de los perfiles sin perforaciones.

a) Modo Local, b) Modo Distorsional, y c) Modo Global.

Las macros de Ansys y CUFSM correspondientes a estos diez puntales escogidos se detallan en los Anexos C y D respectivamente.

En los siguientes apartados se muestran los datos obtenidos en los cálculos de comprobación así como los resultados estadísticos que se derivan del estudio y las conclusiones finales sobre la verificación de las formulaciones presentadas en este proyecto.

8.2 Resultados del análisis

En este apartado se presentan los resultados obtenidos en el estudio de comprobación para la verificación de las fórmulas establecidas a través del análisis de los diez perfiles presentados en el apartado anterior.

Para hacer la comprobación se ha tomado como referencia el valor de las cargas críticas de pandeo modales obtenidas mediante el FEM con Ansys, al igual que en los análisis de los perfiles iniciales y la calibración de los modelos.

Con el objetivo de calcular el grado de validez de las fórmulas o modelos establecidos en el capítulo anterior, se incluye junto a los demás resultados de carga crítica para los dos métodos (FEM y FSM) un coeficiente comparativo calculado como la división entre el valor de carga crítica modal obtenido en CUFSM y el valor de carga crítica modal de referencia obtenido en Ansys.

De esta manera, se ha considerado aceptable el hecho de que los valores de este coeficiente estén comprendidos entre 0,95 y 1,05, y por otro lado los resultados serán considerados excepcionales si los valores que adopta este coeficiente están comprendidos entre 0,98 y 1,02 (correspondiente al 2% de error establecido como margen en el proceso de calibrado de los modelos).

Por último cabe mencionar que los valores de este coeficiente que estén por debajo de 1 indican que los resultados son conservativos, mientras que para valores del coeficiente superiores a 1 indican que los valores en CUFSM son superiores a los valores de referencia y por tanto no conservativos.



La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos:

a)

Modo Local			
PUNTAL	Carga crítica FEM (N)	Carga crítica CUFSM (N)	$P_{críticaCUFSM}/P_{críticaFEM}$
S6	400490	428492	1,07
S7	244562	272647	1,11
S8	392196	340669	0,87
S9	597490	387972	0,65
S10	277902	235419	0,85
S11	230602	250637	1,09
S12	214105	208854	0,98
S13	468599	430914	0,92
S14	482488	571486	1,18
S15	319885	305533	0,95

b)

Modo Distorsional			
PUNTAL	Carga crítica FEM (N)	Carga crítica CUFSM (N)	$P_{críticaCUFSM}/P_{críticaFEM}$
S6	198888	193212	0,97
S7	143734	137090	0,95
S8	147030	136672	0,93
S9	151733	148839	0,98
S10	168190	156875	0,93
S11	191013	181449	0,95
S12	48479	44828	0,92
S13	132695	120717	0,91
S14	122875	111619	0,91
S15	143415	134710	0,94

c)

Modo Global				
PUNTAL	Longitud (mm)	Carga crítica FEM (N)	Carga crítica CUFSM (N)	$P_{críticaCUFSM}/P_{críticaFEM}$
S6	1800	51265	52356	1,02
S7	1500	38744	40136	1,04
S8	1000	49895	48211	0,97
S9	3200	55596	54626	0,98
S10	1800	49340	45061	0,91
S11	1500	66832	61425	0,92
S12	1100	24366	24830	1,02
S13	1560	68828	65820	0,96
S14	1690	64161	59792	0,93
S15	1800	39880	37099	0,93

Tabla 8.1-Resultados obtenidos en la comprobación de los diez perfiles analizados.

a) Modo Local, b) Modo Distorsional, y c) Modo Global.

8.3 Discusión de los resultados obtenidos

Para poder realizar una valoración general de cada modo de inestabilidad es necesario determinar el grado de correlación que presentan los valores obtenidos con CUFSM y los obtenidos con Ansys.

A tal efecto, a continuación se muestran los valores de los estadísticos encargados de proporcionar el grado de validez de los resultados, estos son, el valor promedio (μ) y el valor de la desviación estándar (σ).

a)

Modo Local		
Ratio	Promedio (μ)	Desviación estándar(σ)
$\frac{P_{crCUFSM}}{P_{crFEM}}$	1,05	0,087



b)

Modo Distorsional		
Ratio	Promedio (μ)	Desviación estándar(σ)
$\frac{P_{cr}CUFSM}{P_{cr}FEM}$	0,940	0,024

c)

Modo Global		
Ratio	Promedio (μ)	Desviación estándar(σ)
$\frac{P_{cr}CUFSM}{P_{cr}FEM}$	0,968	0,045

Tabla 8.2-Resultados obtenidos del valor promedio y desviación estándar para los tres modos de inestabilidad. A) Modo Local, b) Modo Distorsional, y c) Modo Global.

De la tabla 8.2 se desprende la conclusión de que el modelo que se ha obtenido para el modo global a lo largo de todo el proyecto es el que mejor resultados proporciona puesto que su valor promedio (0,977) es muy bueno (2% de error) a pesar de tener una desviación estándar algo más desfavorable (4,7%).

Si se analiza la tabla 8.1 donde se detalla los resultados obtenidos para cada uno de los ocho perfiles escogidos en esta etapa de comprobación y verificación de los modelos, se observa que sólo en dos de ellos se produce un error cercano al 8% y en el resto de casos el error está entre el 2% y el 4%.

Con el objetivo de comprobar con mayor rigurosidad la validez del modelo anterior, y teniendo en cuenta que éste tuvo que ser calibrado de manera distinta debido a que no existe un valor mínimo de pandeo global como referencia tal y como se apuntó en el capítulo 6, se han vuelto a realizar las comprobaciones para los diez perfiles escogidos pero con la diferencia de que la longitud escogida para los mismos en este caso es el doble que en el estudio de comprobación anterior. De esta manera se podrá evaluar el alcance del modelo en función de la variación de la longitud del puntal y garantizar que el hecho de

haber calibrado el modelo a partir de los valores que ofrecían el 90% de participación global es suficiente.

La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos en este segundo análisis de comprobación de resultados para el modo global:

Modo Global				
PUNTAL	Longitud (mm)	Carga crítica FEM (N)	Carga crítica CUFSM (N)	$P_{críticaCUFSM}/P_{críticaFEM}$
S6	3600	16380	16307	0,97
S7	3000	13547	14116	1,04
S8	2000	17846	16860	0,95
S9	6400	18118	18259	1,01
S10	3600	18661	17268	0,93
S11	3000	24758	22519	0,91
S12	2200	8101	8247	1,02
S13	3120	22480	21685	0,96
S14	3380	20583	19856	0,96
S15	3600	13827	12984	0,94

Tabla 8.3-Resultados obtenidos en la comprobación para el modo global de los diez perfiles analizados con una longitud doble a la inicialmente considerada.

Modo Global		
Ratio	Promedio (μ)	Desviación estándar(σ)
$\frac{P_{crCUFSM}}{P_{crFEM}}$	0,971	0,043

Tabla 8.4- Resultados obtenidos del valor promedio y desviación estándar para el modo global con la longitud de los puntales doble a la inicialmente considerada.



En ambos casos se aprecia que la mayoría de los resultados obtenidos son conservadores (valores de $P_{crítica\ CUFSM}/P_{crítica\ FEM}$ por debajo de 1) por lo que como conclusión final del modo global se destaca que el modelo presentado en el capítulo 7 (Ec.7.10) es un buen modelo ya que a pesar de su sencillez proporciona resultados muy acertados.

Se recuerda al lector el modelo que se ha desarrollado en este proyecto para el modo global:

$$t_r = 0,71.t.\left(\frac{L_{np}}{L}\right) \quad (\text{ver Ec.7.10 del capítulo 7})$$

Que se simplifica a:

$$t_r = 0,7.t.\left(\frac{L_{np}}{L}\right)$$

Seguido del modo global, el modo distorsional también es un buen modelo tal y como se había apuntado en el capítulo 7 en la determinación del modelo mediante estudios estadísticos de los datos obtenidos (el modelo explica el 98% de la variabilidad del espesor reducido necesario en las bandas perforadas en CUFSM).

En la tabla 8.2 se puede apreciar que el valor promedio general para el modo distorsional ha sido de 0,944, lo cual es un buen resultado además de que el modelo presenta una baja dispersión (0,024, alrededor del 2%).

Si se analiza particularmente los resultados obtenidos en los 10 perfiles escogidos se observa que, al igual que en el modo global, en la mayoría de casos el error cometido está entre el 2% y el 4%.

De la misma forma, los resultados obtenidos son conservativos de manera que la carga crítica de cálculo mediante el método *FSM* es inferior a la que se ha escogido como referencia para los puntales (*FEM*).

Por consiguiente, el modelo para el estudio de perfiles sometidos a pandeo distorsional es muy buen modelo.

Además, se recuerda al lector que el modelo que se obtuvo en el capítulo 7 para el modo distorsional es razonable puesto que cumple con la teoría de rigidez flexional de placas del modelo de Love-Kirchhoff.

El modelo que se ha desarrollado en este proyecto para el modo distorsional es:

$$t_r = 0,897.t.\left(\frac{L_{np}}{L}\right)^{1/3} - 0,082 \quad (\text{ver Ec.7.5 del capítulo 7})$$

Que se simplifica a:

$$t_r = 0,9.t.\left(\frac{L_{np}}{L}\right)^{1/3}$$

Por último, para el caso del modo Local, cabe comentar que a pesar de que tras los estudios estadísticos correspondientes en la determinación del modelo seleccionado (se consiguió explicar un 88% de la variación total del espesor reducido), los resultados en la comprobación y verificación del modelo son deficientes.

A pesar de que en la tabla 8.2 se puede observar que el promedio general para el modo local es bueno (0,941), la desviación estándar es muy alta (0,155) por lo que se corre el riesgo de cometer errores en algunos casos entorno al 15%.

Este hecho se ve reflejado en los resultados que se muestran en la tabla 8.1 para el modo local. En ella puede apreciarse que en muchos de los puntales analizados el error que se comete es bastante elevado (entorno al 13%) llegando incluso a ser crítico en uno de los estudios, el correspondiente al perfil S9 en el que el error cometido es del 35%).

Por todo ello y a pesar de la gran voluntad e insistencia por parte del autor de obtener un modelo genérico para el modo local al igual que se ha conseguido con los modos global y distorsional, no se ha podido obtener un buen modelo que proporcione un buen ajuste en los resultados de los cálculos realizados para este modo.



8.4 Valoración de los resultados mediante el cálculo de la esbeltez

de las columnas analizadas

La esbeltez es la relación que existe entre la sección del puntal y su longitud. Normalmente, las diferentes normativas prevén una reducción de la resistencia del puntal en términos de su esbeltez mecánica ya que, cuanto más esbelto sea el elemento mayor será la reducción de su resistencia debida al probable efecto de pandeo sobre el mismo.

Actualmente, existen varios métodos equivalentes de tratar esta reducción de la resistencia por efecto del pandeo, como por ejemplo, el eurocódigo [2] y el CTE, que definen la esbeltez mecánica reducida $\bar{\lambda}$ o razón entre la resistencia plástica de la sección de cálculo y la compresión crítica de pandeo, como:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{P_{cr}}} \quad (\text{Ec. 8.1})$$

Donde:

- A es el área transversal efectiva (o área neta) para el elemento que se pretende dimensionar para resistir el pandeo.
- f_y es la tensión de límite elástico (o tensión mecánica máxima) usada para caracterizar el comportamiento del material.
- P_{cr} es la carga crítica de pandeo del elemento.

La carga crítica de pandeo (P_{cr}) en el estudio de pandeo por flexión suele determinarse teóricamente mediante la carga de Euler que tiene por expresión:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_k^2} \quad (\text{Ec. 8.2})$$

Donde:

- E es el módulo de Young del material.
- I es la inercia (también llamada momento de inercia de área) de la sección del puntal.
- L_k^2 es la longitud crítica de pandeo.

De este modo, combinando las dos expresiones anteriores (8.1 y 8.2) es fácil observar que la esbeltez mecánica reducida ($\bar{\lambda}$) depende del radio de giro de la sección, como se demuestra a continuación:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{P_{cr}}} = \sqrt{\frac{f_y}{P_{cr}/A}} = \sqrt{\frac{f_y}{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_k^2 \cdot A}}} = \sqrt{\frac{f_y}{\pi^2 \cdot E}} \cdot \sqrt{\frac{L_k^2}{I/A}} = \sqrt{\frac{f_y}{\pi^2 \cdot E}} \cdot \frac{L_k}{r}$$

(Ec.8.3)

Donde:

- r es el radio de giro de la sección.

Para los cálculos de la esbeltez reducida se utilizará la expresión 8.1, donde los valores de carga crítica de pandeo (P_{cr}) corresponden a los valores obtenidos en este estudio mediante los métodos *FEM* ($P_{cr \text{ FEM}}$) y *FSM* ($P_{cr \text{ FSM}}$). La idea es calcular la esbeltez reducida de los puntales ensayados para ambas cargas críticas y determinar el error cometido, con el fin de comprobar la validez de la formulación obtenida para el espesor reducido en los tres modos de inestabilidad (local, distorsional y global).

En la tabla 8.4 se pueden observar los resultados obtenidos:



Modo Local								
PUNTAL	A _{neto} (mm ²)	f _y (N/mm ²)	P _y (N)	P _{cr FEM} (N)	P _{cr CUFSM} (N)	λ _{FEM}	λ _{CUFSM}	λ _{CUFSM} /λ _{FEM}
S6	398,50	375	149438	400490	428492	0,61	0,59	0,97
S7	343,03	375	128635	244562	272647	0,73	0,69	0,95
S8	286,98	375	107619	392196	340669	0,52	0,56	1,07
S9	978,79	375	367046	597490	387972	0,78	0,97	1,24
S10	465,45	375	174542	277902	235419	0,79	0,86	1,09
S11	382,77	375	143539	230602	250637	0,79	0,76	0,96
S12	200,36	375	75133	214105	208854	0,59	0,60	1,01
S13	386,32	375	144871	468599	430914	0,56	0,58	1,04
S14	386,32	375	144871	482488	571486	0,55	0,50	0,92
S15	378,39	375	141896	319885	305533	0,67	0,68	1,02
Promedio (μ)								1,03
Desviación Estándar (σ)								0,09

Modo Distorsional								
PUNTAL	A _{neto} (mm ²)	f _y (N/mm ²)	P _y (N)	P _{cr FEM} (N)	P _{cr CUFSM} (N)	λ _{FEM}	λ _{CUFSM}	λ _{CUFSM} /λ _{FEM}
S6	398,50	375	149438	198888	193212	0,87	0,88	1,01
S7	343,03	375	128635	143734	137090	0,95	0,97	1,02
S8	286,98	375	107619	147030	136672	0,86	0,89	1,04
S9	978,79	375	367046	151733	148839	1,56	1,57	1,01
S10	465,45	375	174542	168190	156875	1,02	1,05	1,04
S11	382,77	375	143539	191013	181449	0,87	0,89	1,03
S12	200,36	375	75133	48479	44828	1,24	1,29	1,04
S13	386,32	375	144871	132695	120717	1,04	1,10	1,05
S14	386,32	375	144871	122875	111619	1,09	1,14	1,05
S15	378,39	375	141896	143415	134710	0,99	1,03	1,03
Promedio (μ)								1,03
Desviación Estándar (σ)								0,01

c)

Modo Global								
PUNTAL	A_{neta} (mm ²)	f_y (N/mm ²)	P_y (N)	$P_{cr FEM}$ (N)	$P_{cr CUFSM}$ (N)	λ_{FEM}	λ_{CUFSM}	$\lambda_{CUFSM}/\lambda_{FEM}$
S6	398,50	375	149438	51265	52356	1,71	1,69	0,99
S7	343,03	375	128635	38744	40136	1,82	1,79	0,98
S8	286,98	375	107619	49895	48211	1,47	1,49	1,02
S9	978,79	375	367046	55596	54626	2,57	2,59	1,01
S10	465,45	375	174542	49340	45061	1,88	1,97	1,05
S11	382,77	375	143539	66832	61425	1,47	1,53	1,04
S12	200,36	375	75133	24366	24830	1,76	1,74	0,99
S13	386,32	375	144871	68828	65820	1,45	1,48	1,02
S14	386,32	375	144871	64161	59792	1,50	1,56	1,04
S15	378,39	375	141896	39880	37099	1,89	1,96	1,04
Promedio (μ)								1,02
Desviación Estándar (σ)								0,02

Tabla 8.4- Resultados obtenidos en la comprobación de los valores de esbeltez reducida mediante los métodos *FEM* y *FSM* para los modos a) local, b) distorsional y c) global.

8.5 Conclusiones sobre los resultados obtenidos

Como se aprecia en la tabla 8.4, los valores finales de promedio y desviación estándar para los modos distorsional y global en esta última etapa de comprobación son muy satisfactorios, cometiéndose un error menor o igual al 2%.

Para el caso del modo local, a pesar de que el valor promedio ha mejorado ligeramente (1,03 frente a 1,05 obtenido en la tabla 8.2), el valor de la desviación estándar se mantiene constante y podría cometerse un error del 9%, por lo que se desestima la validez del modelo para este modo de inestabilidad y se propone, para estudios futuros referentes a este tema, seguir las pautas y recomendaciones que se presentan en el apartado siguiente.



CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El objetivo principal del proyecto en el desarrollo del método de análisis de diseño para las columnas perforadas ha sido el de presentar un procedimiento para el cálculo de cargas de pandeo elástico a través del método de las Bandas Finitas (FSM).

Para lograr este objetivo, ha sido necesario desarrollar una formulación o modelo de espesor reducido de las bandas perforadas del perfil para cada uno de los tres modos de inestabilidad (local, distorsional y global).

El software de acceso libre y gratuito que se ha empleado para el análisis de los perfiles mediante FSM ha sido CUFSM [6].

Como conclusión final se ha visto que los modelos que se han desarrollado para el modo distorsional y el modo global funcionan bien, al contrario que en el caso del modelo para la abolladura local, que no proporciona valores de carga crítica del todo aceptables.

Para intentar solucionar la falta de precisión del modelo para la abolladura local, se han realizado de nuevo numerosos estudios estadísticos en busca de un modelo más riguroso y eficaz pero, a pesar de obtener modelos que determinan el 91% de la variabilidad del espesor reducido para la abolladura local (ver capítulo 7) no se ha conseguido obtener resultados del todo satisfactorios en los valores de carga crítica obtenidos mediante el FSM para el modo local.

Sin embargo, el hecho de que los resultados obtenidos para los modos distorsional y global hayan sido satisfactorios aviva los esfuerzos para seguir investigando en la línea de la abolladura local.

Tal y como se apuntó en la introducción del proyecto, todo el trabajo realizado está enfocado para que pueda servir como base en estudios e investigaciones futuras que aborden el tema del cálculo de los modos de pandeo para columnas de soporte perforadas mediante el FSM. En este sentido, y teniendo en cuenta las conclusiones, observaciones y experiencia obtenida en las investigaciones que en este proyecto se han realizado, a continuación se proponen ciertas recomendaciones para los futuros estudios que puedan derivarse de éste:

- ★ Ampliar la base de datos analizando mayor variedad de puntales con perforaciones empleados en las columnas de soporte para estanterías y con secciones transversales y perforaciones diferentes. De este modo, la base de datos será más



sólida y los estudios estadísticos que se realicen a partir de ella proporcionarán modelos más precisos.

- ★ Establecer otras vías de cálculo para el análisis de los puntales sometidos a los tres modos de inestabilidad mediante FSM y que se puedan contrastar correctamente con el método FEM. Para ello, tal y como se ha procedido en este proyecto, es necesario garantizar las mismas condiciones de cálculo (geometría, enlace, cargas, etc).
- ★ Tras la experiencia obtenida en la investigación de este proyecto y concretamente para la formulación del modo de abolladura local que es el que aún puede mejorarse bastante, el autor propone una vía alternativa en el análisis.

Esta vía consiste en analizar por separado los puntales perforados sometidos a abolladura local predominante en el alma del perfil, de los puntales perforados sometidos a abolladura local predominante en las alas de los mismos.

Para ello, se debería garantizar que el tipo de abolladura local obtenido en Ansys para un puntal cualquiera sea, en la medida de lo posible, similar al obtenido en CUFSM para ese mismo puntal.

Este hecho, a pesar de que a simple vista parezca sencillo de llevar a cabo, a veces resulta muy difícil e incluso impracticable debido a que en Ansys es únicamente la experiencia del calculista la que determina, mediante simple observación, el modo de abolladura local a escoger.

- ★ Mejorar la interfaz con el usuario. Puesto que el procedimiento de cálculo en CUFSM ha sido meramente iterativo (se ha iterado continuamente los valores de espesor reducido en las bandas perforadas que garantizaban la misma carga crítica elástica que Ansys con un error no superior al 2%), se podrían agilizar los cálculos con futuras modificaciones del programa que podrían mejorar este aspecto.

En este sentido, se podría introducir al programa la carga crítica elástica obtenida en Ansys y que se desea obtener en CUFSM y que éste último muestre al usuario el espesor reducido necesario en las bandas perforadas para lograr este hecho. De esta manera, el proceso de calibrado de los modelos sería mucho más rápido y ágil, pudiendo analizar para el mismo tiempo muchos más puntales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] SCHAFER, B.W y ÁDÁNY S. (2006). "Buckling analysis of cold-formed steel members using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods." 18th International Speciality Conference on Cold-Formed Steel Structures, October 26-27, 2006, Orlando, Florida.
- [2] Eurocode 3: Design of Steel Structures. Part 1-3: General Rules. Supplementary rules for cold -formed thin gauge members and sheeting (Final Project Team Draft N1199E), Comité Européen de Normalisation (CEN), September 2005.
- [3] RONDAL J., Cold Formed Steel Members and Structures. General Report, Journal of Constructional Steel Research 55 (2000) 155-158.
- [4] DAVIES J.M., Recent Research Advances in Cold -Formed Steel Structures, Journal of Constructional Steel Research 55 (2000) 267-288.
- [5] Y.S.Lee and J.S. Yim; A Study on the load distribution factor in the perforated square plate with elastic support 1993 Elsevier Science Publishers B.V.
- [6] CUFSM v.3.12
- [7] MECALUX, [<http://www.mecalux.es>, Marzo 2011].
- [8] ÁDÁNY S. y B.SCHAFER, Buckling mode classification of members with open thin-walled crosssections by using the Finit Strip Method. Research report. Johns Hopkins University, 2004.
- [9] SCHAFER B.W. y YU C., Distortional Buckling of Cold-Formed Steel Members in Bending. Final Report. Baltimore, Maryland, January 2005.
- [10] SCHAFER B.W. y ÁDÁNY S. (2006). "Buckling analysis of cold-formed steel members using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods." Eighteenth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures, Orlando, FL. October 2006.
- [11] SCHARDT R. Verallgemeinerte Technische biegetheorie. Berlin Heidelberg: Springer; 1989.
- [12] SCHAFER B.W. y HOPKINS J. Thin-Walled Structures Research Group. Generalized Beam Theory (GBT). <http://www.ce.jhu.edu/bschafer/gbt/index.htm>



- [13] CASAFONT M., Comportamiento de perfiles perforados de chapa conformada sometidos a flexo-compresión. Tesis Doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya (UPC) 2003.
- [14] DAVIES J.M. y LEACH P., Some Applications of Generalized Beam Theory, Eleventh International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures, St Louis, Missouri, U.S.A., October 20-21, 1992.
- [15] DAVIES J.M. y LEACH P., First-Order Generalised Beam Theory, J. Construct. Steel Research 31 (1994) 187-220.
- [16] DAVIES J.M. y LEACH P., Second-Order Generalised Beam Theory, J. Construct. Steel Research 31 (1994) 221-241.
- [17] DAVIES J.M. y LEACH P., An Experimental Verification of the Generalized Beam Theory Applied to Interactive Buckling Problems, Thin-Walled Structures Vol. 25, No. 1, pp. 61-79, 1996.
- [18] AISI (2004) Supplement 2004 to the North American Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members, 2001 Edition: Appendix 1, Design of Cold-Formed Steel Structural Members Using Direct Strength Method. *American Iron and Steel Institute*, Washington, D.C., SG05-1.
- [19] SCHAFER, B.W., "Designing Cold-Formed Steel Using the Direct Strength Method". 18th International Speciality Conference on Cold-Formed Steel Structures, October 26-27, 2006, Orlando, Florida.
- [20] SCHAFER B.W. y MOEN C., Direct strength Design for Cold-Formed Steel Members with Perforations. Progress Report N°4. Johns Hopkins Engineering, July 30, 2007.
- [21] BATISTA E.M. y RODRIGUES F.C., Buckling Curve for Cold-Formed Compressed Members, J. Construct. Steel Research 28 (1994) 121-136.
- [22] ÁDÁNY S. y SCHAFER B.W., Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: Derivation. Thin-walled Structures, in press, doi:10.1016/j.tws.2006.03.013.
- [23] ÁDÁNY S. y SCHAFER B.W., Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: Application and examples. Thin walled Structures, in press, doi:10.1016/j.tws.2006.03.014.

- [24] D.MOEN y SCHAFER B.W. Direct strength Design of Cold-Formed Steel Members with Perforations. American Iron and Steel Institute. Committee on Specifications for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members. 1140 Connecticut Ave, Suite 705. Washington, DC 20036.Marzo 2009.
- [25] SCHAFER B.W., Computational Modeling of Cold-Formed Steel.CIMS 2008. Fifth International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures. Sydney, Australia, 23-25 June, 2008
- [26] ANSYS, User manual revision 12.0, Swanson Analysis System Inc.
- [27] MARTIN, L. H. y PURKISS, J. A. Structural Design of Steelwork to EN 1993 and EN 1994, Capítulo 11: Cold-formed Steel Sections, 3rd Edition, Elsevier Science 1997.
- [28] ABAQUS, User manual v.6.9.
- [29] R. Johnson (1996): "Elementary Statistics". Ed. Duxbury.
- [30] D.A. Lind, R.D. Mason, W.G. Marchal (2001): "Estadística para Administración y Economía". Ed. Irwin McGraw-Hill.F.
- [31] Canavos G. 1988. Análisis de regresión: el modelo lineal simple. En: Probabilidad y estadística: aplicaciones y métodos. 1a ed. México: Mc Graw-Hill. p. 443-502.
- [32] Triola, Mario F.Estadística.10^a edicion. Pearson Educacion, 2009. ISBN:9789702612872
- [33] Ipiña, Santiago L. Inferencia Estadística y analisis de datos.Pearson Educacion,2008.Madrid. ISBN: 9788483224045
- [34] ANSYS 12.0, producto de ANSYS Inc®
- [35] Perez Lopez,Cesar.Estadística aplicada a traves de Excel. Pearson Educacion,cop.2002.Madrid. ISBN: 8420535362
- [36] WARDENIER J., Perfiles tubulares en aplicaciones estructurales, Instituto para la Construcción Tubular (ICT), 2002.
- [37] LaBOUBE R.A. y Yu W.W., Recent research and developments in cold -formed steel framing, Thin-Walled Structures 32 (1998) 19-39.



- [38] MacCARTHY I., Prefabricated Building Method Using Cold -Formed Steel Components, Journal of Constructional Steel Research, 1998, 46:1-3, Paper No. 417.
- [39] MECALUX, Estanterías para paletización compacta. Catálogo Abril 2011.
- [40] MECALUX, Estanterías para paletización convencional. Catálogo Abril 2011.
- [41] MECALUX, Sistemas de almacenaje. Catálogo Abril 2011.
- [42] THIN-WALL. Civil Engineering-The University of Sydney. [<http://www.civil.usyd.edu.au/case/software.shtml>, Noviembre 2008].
- [43] CASAFONT M., et al. Calculation of pure distortional elastic buckling loads of members subjected to compression via the finite element method. Thin Walled Struct (2009), doi:10.1016/j.tws.2008.12.001.
- [44] ÁDÁNY S. y SCHAFER B.W., Buckling mode classification of members with open thinwalled cross-sections. Fourth International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures. Rome, Italy, 27-29 September, 2004.
- [45] SILVESTER N. y CAMOTIM D. First-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials. Thin-Walled Structures 2002;40:755-89.
- [46] CASAFONT M., et al., "Combined GBT-FEM procedure for the determination of pure distortional buckling loads". 5th International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures, June 23-25, 2008, Sydney, Australia.
- [47] YOUNG B. y RASMUSSEN, J.R., Tests of Fixed-Ended Plain Channel Columns, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 124, No. 2, February, 1998.
- [48] CASAFONT M., PASTOR M.M. y CAAMAÑO E., Experimental investigation on the test method for distortional buckling of pallet rack uprights. Part 1: Preliminary calculations and test lengths, ETS. d'Enginyeria Industrial de Barcelona, Universitat Politècnica de Catalunya, Av. Diagonal 647, 08028, Barcelona 2009.
- [49] CASAFONT M., PASTOR M.M. y CAAMAÑO E., Experimental investigation on the test method for distortional buckling of pallet rack uprights. Part 2: Results of the experimental campaign, ETS. d'Enginyeria Industrial de Barcelona, Universitat Politècnica de Catalunya, Av. Diagonal 647, 08028, Barcelona 2009.

- [50] PUT B.M, PI Y. y TRAHAIR N.S., Lateral Buckling Tests on Cold-Formed Channel Beams, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 125, No. 5, 532-539, May, 1999. Matlab versión 6.5.0.180913a Release 13.
- [51] TS-10-05. Test method for distortional buckling of cold-formed steel hat shaped columns.
- [52] AISI Committee on Specifications For the Design of Cold-Formed Steel Structural Members. Subcommittee 6, Test Procedures. August 9, 2005.
- [53] AISI (2001) North American Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members. American Iron and Steel Institute, Washington, D.C., AISI/COS/NASPEC 2001.
- [54] CASAFONT M., PASTOR M.M. y CAAMAÑO E., Experimental investigation on the test method for distortional buckling of pallet rack uprights. Part 3: Linear buckling analysis of perforated rack members, ETS. d'Enginyeria Industrial de Barcelona, Universitat Politècnica de Catalunya, Av. Diagonal 647, 08028, Barcelona 2009.
- [55] SCHAFER, B.W., P. Point Presentation "Designing Cold-Formed Steel Using the Direct Strength Method". 18th International Speciality Conference on Cold-Formed Steel Structures, October 26-27, 2006, Orlando, Florida.
- [56] SCHAFER B.W., Direct strength Design for Cold-Formed Steel Members with Perforations. Proposal *DSM* with holes. Johns Hopkins Engineering, June 2004.
- [57] SCHAFER B.W. y MOEN C., Direct strength Design for Cold-Formed Steel Members with Perforations. Progress Report N°1. Johns Hopkins Engineering, February 16, 2006.
- [58] SCHAFER B.W. y MOEN C., Direct strength Design for Cold-Formed Steel Members with Perforations. Progress Report N°2. Johns Hopkins Engineering, August 1, 2006.
- [59] SCHAFER B.W. y MOEN C., Direct strength Design for Cold-Formed Steel Members with Perforations. Progress Report N°3. Johns Hopkins Engineering, February 20, 2007.
- [60] SCHAFER B.W. y MOEN C., Direct strength Design for Cold-Formed Steel Members with Perforations. Progress Report N°4 P. Point Presentation. Johns Hopkins Engineering, July 30, 2007.



- [61]** AutoCAD ® 2007.
- [62]** SMITH W.F., “Fundamentos de la ciencia e ingeniería de materiales” 2ªed. Mc Graw Hill.
- [63]** YU W.W., Cold-Formed Steel Design, 3rd Edition, John Wiley & Sons, 2000.
- [64]** Rotter, J. M., “Guide for the Economic Design of Circular Metal Silos”, Spon Press, (2001).
- [65]** Bathe, K. J., “Finite Element Procedures”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1996).
- [66]** Wempner, G.A., “Discrete approximation related to nonlinear theories of solids”. International Journal of Solids and Structures, 7:1581-1599, (1971).
- [67]** Riks, E., “The Application of Newton's Methods to the Problem of Elastic Stability”, Journal of Applied Mechanics, Vol. 39 (1060-1065), (1972).
- [68]** Riks, E., “An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems”, International Journal of Solids and Structures, Vol. 15 (529-551), (1979).
- [69]** Forde, W. R. B. and Stierner S. F., "Improved Arc Length Orthogonality Methods for Nonlinear Finite Element Analysis", Computers & Structures, Vol. 27, No. 5, pp. 625-630, (1987).